J. H. Woodger

Biología y lenguaje

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. Quentin Gibson: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. Ashley Montagu: *La dirección del desarrollo humano* (2ª ed.).
3. Gustav Bergmann: *Filosofía de la ciencia.*
4. Christian Bay: *La estructura de la libertad.*
5. Ernest Nagel: *La lógica sin metafísica.*
6. David Hilbert y Wilhelm Ackermann: *Elementos de lógica teórica* (2ª ed.).
7. Vernon Van Dyke: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. Karl R. Popper: *La lógica de la investigación científica* (2ª ed.).
9. R. M. Martin: *Verdad y denotación.*
10. Ernest Gellner: *Palabras y cosas.*
11. C. O. Broad: *El pensamiento científico.*
12. John Hospers: *La conducta humana.*
13. Arthur Pap: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. Schelling: *La estrategia del conflicto.*
15. Richard B. Braithwaite: *La explicación científica.*
16. Milic Capek: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. Ros Ashby: *Proyecto para un cerebro.*
18. Hans Reichenbach: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. George Polya: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. George L. S. Shackle: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. Armstrong: *La percepción y el mundo físico.*
22. Ernest Nagel: *Razón soberana.*
23. Max Black: *Modelos y metáforas.*
24. Haskell B. Curry y Robert Feys: *Lógica combinatoria.*
25. Ludwig Wittgenstein: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. Abraham Edel: *El método en la teoría ética.*
27. Alfred Landé: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. Jean Ladrière: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. Wiener y J. P. Schadé: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. von Wright: *Norma y acción.* Una investigación lógica.
31. E. Nagel y J. P. Newman: *El teorema de Gödel.*
32. Henry Margenau: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. Chappell: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. Alf Ross: *Lógica de las normas.*
35. W. Sellars: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. Christian Thiel: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. Claude Flament: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. Kneale: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. Hughes y M. J. Cresswell: *Introducción a la lógica modal.*
40. Karl R. Popper: *Conocimiento objetivo.*
41. Gottlob Frege: *Escritos lógico-semánticos.*
42. Stephen C. Kleene: *Introducción a la Metamatemática.*
43. G. Kalinowski: *Lógica del discurso normativo.*
44. J. J. C. Smart: *Entre Ciencia y Filosofía.* Una introducción a la Filosofía de la Ciencia.
45. C. Truesdell: *Ensayos de Historia de la Mecánica.*
46. A. Heyting: *Introducción al intuicionismo.*
47. J. Lukasiewicz: *La Silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la Lógica Formal Moderna.*
48. K. Henrik Borch: *La economía de la incertidumbre.*

BIOLOGIA Y LENGUAJE

ESTRUCTURA Y FUNCION

EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

J. H. Woodger

BIOLOGIA Y LENGUAJE

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Edición castellana de la obra
Biology & Language
Esta traducción se publica por acuerdo con
la Cambridge University Press, Inglaterra

Traducción por
MANUEL GARRIDO

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1978
O'Donnell, 27. Madrid-9
ISBN: 84-309-0738-6
Depósito Legal: M. 13634-1978

Printed in Spain - Impreso en España por Gráficas Lormo - Isabel Méndez, 15 - Madrid-18

INDICE

Prefacio . . . . . *Pág.* 9

PARTE I
METODOLOGIA GENERAL

Capítulo I

§ 1. *La biología y el método matemático* 15
§ 2. *Clasificación de signos y enunciados biológicos* 20

Capítulo II

§ 1. *Enunciados teoréticos* 24
§ 2. *La relación de consecuencia. Operaciones sobre enunciados* 26
§ 3. *La estructura de los enunciados generales* 30
Notas a la Parte I 48
Apéndice A. Un análisis de la obra de Harvey *De motu cordis et sanguinis.* . . 55

PARTE II
PROBLEMAS METODOLOGICOS EN GENETICA

Capítulo III

§ 1. *Introducción* 71
§ 2. *La relación de parte* 71
§ 3. *La relación de precedencia en el tiempo* 73
§ 4. *Biontes* 74
§ 5. *Ambientes* 85
§ 6. *La relación parental* 87

Capítulo IV

BOSQUEJO DE UN SISTEMA DE **Pd**-GENETICA

§1. 91
§2. 95
§3. 107
Un ejemplo imaginario de un sistema **Pd**-*genético* 113

Capítulo V

Una nueva visión de la genética de los gametos 122
El sistema axiomático 122
Notas al Capítulo V 151
Apéndice B. Contribución lingüística al estudio de la evolución 154

Capítulo VI

BIOLOGIA Y PERSONAS 183

PREFACIO

Cuando se me pidió autorización para publicar en versión castellana mis Conferencias Tarner, *Biology and Language*, contesté que estaba dispuesto a dar el consentimiento a condición de poder revisarlas primero. Desde su publicación, he descubierto en ellas tantos errores y defectos, que no me parecía procedente permitir que se reeditasen sin revisión. Esta revisión ha requerido mucho trabajo, porque desde la publicación de la edición original, he aprendido mucho más acerca de esta materia y del modo adecuado de exponerla. En consecuencia, el presente libro no puede ser llamado propiamente una traducción; es demasiado diferente del original. Debo subrayar asimismo que este nuevo libro no es primariamente un libro de biología en el sentido ordinario, sino un libro acerca del *método* en las ciencias biológicas; y no acerca del método de laboratorio, sino acerca del método teórico. Hay dos formas de pensamiento en la ciencia natural: uno es el pensamiento intuitivo, figurativo, o de sentido común, y el otro es el pensamiento abstracto, formal, o exacto. En el momento actual, el pensamiento biológico se encuentra todavía, principalmente, en el primer estadio. En su *Science and the Modern World* (1927, pág. 20), A. N. Whitehead se refiere a estos dos modos de pensamiento como sigue:

> (La ciencia) se ha mantenido predominantemente como un movimiento anti-racional, basado en una fe ingenua. Cuantos razonamientos ha requerido, los ha tomado de la matemática, reliquia superviviente del racionalismo griego, que se conforma al método deductivo.

En este contexto es interesante advertir que si bien el vocablo "deductivo" es usado a veces en la ciencia natural, no se usa en el sentido en el que se usa "deductivo" en el citado pasaje, sino en el sentido en que usan los lógicos el vocablo "inductivo".

La cita de Whitehead puede sugerir que los dos modos de pensamiento son de alguna manera antitéticos; pero este no es el caso. Cada método tiene algo propio que aportar, y por ello necesitamos de ambos. Toda rama de la ciencia natural descansa sobre ciertos supuestos básicos, y toda rama tiene ciertos conceptos iniciales que deben ser entendidos sin definición. En el paso del método del pensamiento intuitivo al método del pensamiento exacto, hemos de tratar de hacer explícitos cuantos supuestos básicos utilicemos; con frecuencia tales supuestos están solamente implícitos, y por ello no son reconocidos. De modo similar, tratamos de extraer los conceptos primarios. Una vez hecho esto, procedemos a elaborar, o calcular, por los métodos del pensamiento exacto, todos los enunciados a los que nos arrastran esos presupuestos fundamentales, y tratamos de definir

precisamente todos los conceptos que se requieran para ese propósito en términos de los conceptos iniciales no definidos. Este método, cuando se lo lleva a cabo con el suficiente rigor, es el método axiomático o postulacional.

En su libro *The Development of Mathematics* (1945, pág. 72), E. T. Bell escribe:

> (Euclides) es, por tanto, el gran perfeccionador, si no el solo creador, de lo que hoy se llama el método postulacional, el sistema nervioso central de la matemática viva.

Bell continúa después en el siguiente e interesante párrafo:

> Parece extraño que el método de Euclides haya tenido que esperar hasta el s. XIX para obtener el único tipo de apreciación que cuenta algo en matemática, la aplicación. La geometría métrica sintética, por supuesto, continuó en la tradición postulacional. Pero ello era, aparentemente, mera inercia; porque fue décadas después de la geometría proyectiva en el siglo diecinueve, cuando esta materia recibió un fundamento adecuado. Sólo hacia los años 1830 fue cuando tuvo lugar el primer intento serio de suministrar una fundamentación postulacional al álgebra elemental. Y no fue hasta 1899 cuando se dejó sentir, merced al trabajo de otro gran geómetra, D. Hilbert (1862-1943), el gran impacto de la metodología euclidiana en toda la matemática.

En el párrafo siguiente de su libro, Bell pasa a referirse a nuevas aplicaciones del método en matemática, durante las cuatro primeras décadas del siglo veinte; y continúa luego dando ejemplos de su uso en física, mencionando a Dirac, Mach y Einstein, quien había mostrado que el método es "no solamente clarificador, sino creador". Bell añade después las siguientes e interesantes observaciones acerca de las críticas del método:

> Los matemáticos y científicos de tendencia conservadora pueden pensar que una ciencia constreñida por un conjunto de supuestos formulados explícitamente, ha perdido algo de su libertad y está casi muerta. La experiencia enseña que la única pérdida es la negación del privilegio de cometer en el razonamiento errores que pueden ser evitados. Como no es, tal vez, sino humanamente natural, cada nueva embestida del método postulacional es vigorosamente resistida por algunos, que ven en ella una invasión de la tradición consagrada. La objeción a este método no es, ni más ni menos, que la objeción a la matemática. Puede ser que las ciencias de la vida, por ejemplo, sean todavía un yermo demasiado salvaje como para poder sembrar aquí y allá unos cuantos postulados inteligibles, pero el intento ha comenzado, como en la obra (1937) de J. H. Woodger. Si el sueño de Pitágoras sobre la ciencia matemática ha de ser realizado, todas las ciencias deberán, eventualmente, someterse a la disciplina que la geometría aceptó desde Euclides.

No hace falta que nos demos por ofendidos al oir que se hace referencia a nuestra biología tildándola de salvaje yermo. Grandes cosas se han logrado en biología sin la ayuda del método axiomático. Pero esto no significa que no pueda venir ayuda alguna del uso de dicho método. Para descubrir qué puede hacer, debemos intentarlo. Ciertamente, puede ayudarnos a no caer en la autocomplacencia. Cuando una nueva hipótesis alcanza brillantemente el éxito, existe siempre el peligro de que la gente pueda creer que se ha dicho la última palabra

sobre esa materia. El método axiomático nos permite mirar a la materia investigada con una perspectiva más amplia y sugerir así otras líneas de investigación. Es de esperar que el sistema axiomático que se da en el Capítulo V para parte de la genética, brinde eficaz ayuda.

Entre las obras que me han sido más útiles al llevar a cabo esta revisión, figuran *Principia Mathematica,* de Whitehead y Russell, *Survey of Symbolic Logic* de C. I. Lewis, y un artículo de A. B. Kempe titulado *The Subject Matter of Exact Thought,* que apareció en *Nature,* Vol. 43 (1890, págs. 156-62). Estoy también muy en deuda con mi hijo Michael Woodger por su gran ayuda en la detección y corrección de errores.

PARTE I

METODOLOGIA GENERAL

CAPITULO I

§ 1. *La biología y el método matemático.*

Es condición obligada de los conferenciantes de Tarner disertar acerca de la filosofía de las ciencias y de las relaciones entre los diferentes departamentos del saber. Por lo que a mí respecta, propongo discutir las relaciones, y más especialmente la falta de relaciones, entre las ciencias biológicas y un departamento del saber que cuenta escasamente algo más de un siglo de antigüedad, si fijamos su origen a partir de la primera obra de Boole (1847), o incluso bastante menos de un siglo si datamos ese origen a partir de la primera obra de Frege (1879).* El departamento en cuestión se encuentra todavía en fase de activo desarrollo y apenas si es conocido, a excepción de un sector relativamente exiguo de especialistas que lo cultivan para el aprovechamiento de sus propios fines. Su posible incidencia en la ciencia natural apenas si ha sido considerada. Trátase, pues, de una instancia de la falta de relaciones entre departamentos del saber, que suministra un tópico adecuado para servir de tema a un curso de Conferencias Tarner.

Dándose la circunstancia de que uno de los departamentos del saber cuyas relaciones vamos a considerar no es muy conocido, creo mejor introducir mis propósitos tomando como referencia el punto de vista del otro, el cual es el de la biología. Si reflexionamos sobre lo que hacen los biólogos, advertiremos que su más conspicua actividad consiste en la realización y registro de observaciones, que pueden envolver o no envolver el experimento. Pero también lleva a cabo el biólogo otras funciones no tan obvias, que, justamente por ser menos obvias, pueden pasar inadvertidas. La realización de observaciones no es algo que tenga lugar en un "vacuum" intelectual, sino que se da precedida y seguida de la invención de hipótesis, las cuales son comprobadas mediante el recurso a ulteriores observaciones. A rarísimos intervalos, estas hipótesis producen un tremendo efecto: abren líneas enteramente nuevas de investigación —creando nuevas ramas de la ciencia y afectando asimismo a las viejas ramas ya existentes. Ejemplos familiares son las hipótesis introducidas en biología por William Harvey, Charles Darwin, Gregor Mendel y Louis Pasteur. El papel jugado por las hipótesis en la obra de estos hombres afamados, queda oscurecido por el modo según el cual se los representa en las historias de la ciencia no tanto como inventores de hipótesis, sino como descubridores. Así por ejemplo Harvey es comúnmente citado como el

---

* Véase Nota 1, p. 48.

descubridor de la circulación de la sangre. Pero lo que realmente hizo fue algo mucho más importante. Lo que hizo fue inventar una *hipótesis* concerniente a la acción del corazón, que llevaba consigo múltiples y revolucionarias *consecuencias* para la fisiología, una de las cuales tan sólo fue la circulación de la sangre.* De esta manera la distinción entre la realización de observaciones y la invención de hipótesis tiende a ser eliminada, y es posible incluso dar con biólogos que niegan que las hipótesis jueguen en su ciencia el más mínimo papel. Tales hombres parecen desconocer el hecho de que están viviendo del capital que les legaron los inventores de hipótesis que ellos no han inventado por sí mismos y sin las cuales sería imposible su propia labor.†

A veces las nuevas hipótesis conducen asimismo a la invención de nuevos aparatos de observación, y las nuevas observaciones que estos aparatos hacen posibles sugieren a su vez ulteriores hipótesis, y así sucesivamente. Este proceso queda mejor ilustrado por la física que por la biología.

Pero además de realizar y registrar observaciones y además de inventar hipótesis, los biólogos realizan, por añadidura, una tercera y todavía más oscura actividad. De vez en cuando pueden surgir cuestiones tales como las siguientes: ¿es esta hipótesis biológica compatible con esa otra? ¿Contradice esta nueva hipótesis las hipótesis ya existentes? ¿Qué modificaciones habría que introducir en esta teoría para poder dar cabida en ella a las recientes observaciones? Etcétera.

Denominemos por el presente *crítica* a esta tercera actividad. Ahora bien, por lo que hace a esta actividad, es cierto que está conectada con los problemas biológicos y es parte del trabajo que realizan los biólogos; sin embargo no es menos manifiesto que el modo que tiene tal actividad de ocuparse de la materia que es objeto de la biología es sólo indirecto —de segunda mano, por así decirlo. Porque las hipótesis y las teorías no son organismos, sino enunciados y sistemas de enunciados relacionados entre sí de un modo característico. Por esta razón, cuando volvemos nuestra atención al ejercicio de la crítica, efectuamos, al mismo tiempo, un cambio de la materia que es objeto de estudio; dejamos de hablar sobre organismos para hablar sobre enunciados. Es importante tener clara conciencia de este cambio de materia. Hablar biología y hablar *sobre* biología son cosas harto diferentes, aun cuando la terminología actualmente en uso no distinga siempre entre ellas.

Es claro que cabe considerar lo que he denominado crítica desde dos puntos de vista. Podemos mirarla, según he sugerido, como una actividad íntimamente conectada con la prosecución de la biología —actividad que resulta necesaria por el hecho de que la biología es algo que está creciendo y cuyo crecimiento no es simple materia de acumulación, sino que envuelve frecuentes reajustes entre teoría y observación. Pero podemos mirarla también como una aplicación a la biología de una rama distinta de la ciencia que es de carácter mucho más general. Porque es claro que las cuestiones sobre hipótesis y teorías biológicas particulares surgen o son instancias de cuestiones mucho más amplias, tales como éstas: ¿qué clase de

---

* Véase Apéndice A, p. 55.
† Véase Nota 2, p. 48.

objeto es una hipótesis? ¿Qué papel juegan, exactamente, las hipótesis en la ciencia natural y cómo lo hacen? ¿Qué es lo que sucede cuando se comprueba una hipótesis científica? ¿Qué constituye una explicación científica? ¿Cómo decidimos si una hipótesis es compatible con otra? Etcétera. La investigación de estas cuestiones de mayor amplitud es tarea de una ciencia distinta, a la que denomino metodología científica general. Lo que he denominado crítica en biología, puede considerarse que es una aplicación de esa ciencia a la biología y cabe denominarla metodología biológica. La materia que es objeto de su estudio se reduce, como he dicho, a los enunciados biológicos.

Ahora bien, los enunciados son unidades de lenguaje, y el lenguaje es, justamente, una herramienta tan indispensable para la prosecución de la biología como los microscopios, los quimógrafos y otros instrumentos. Si las observaciones son imposibles sin los unos, el registro de las mismas y la comunicación de hipótesis resultan no menos imposibles sin el otro.

Siendo ello así, debería parecer que un conocimiento acerca de cómo opera esa herramienta al servicio de la ciencia es algo tan necesario como es el caso en lo que respecta a los otros instrumentos utilizados en biología. Un conocimiento de los equívocos a que nos expone el uso excesivamente ingenuo del lenguaje, nos es tan imprescindible como el conocimiento de los artefactos que acompañan al uso de las técnicas microscópicas. Sin embargo, al presente, los biólogos no reciben, en general, instrucción sobre tales materias en los cursos universitarios, que, por otra parte, suministran información sobre temas que se consideran esenciales para el adiestramiento en biología. La consecuencia es que la metodología biológica se lleva a cabo sobre una base puramente intuitiva.* La razón de ello no hay que buscarla muy lejos. Por una parte se cree que una tal instrucción no es necesaria. Se estima suficiente que un biólogo esté capacitado para hablar y escribir su lengua nativa de acuerdo con las reglas de la gramática y el uso habitual. Espero convencer al lector de que esta creencia dista mucho de poseer fundamento.

Pero aun admitiendo la necesidad o deseabilidad de una tal instrucción, cabe argüir la inexistencia de una base o cuerpo científico que permita impartirla. Sin embargo, eso no es verdad. *Existe* y está a nuestra disposición el cuerpo de tales conocimientos, y esto me lleva como de la mano al segundo miembro del par de departamentos del saber cuya falta de relaciones hemos de investigar. La obra de Boole, Frege y sus seguidores nos ha proporcionado la base para una metodología general, para una nueva ciencia del lenguaje científico. Boole llamó a su magna obra *Una investigación de las leyes del pensamiento,* pero lo que, de hecho, investigó fueron las leyes del lenguaje científico. Cuando hable de biología, significaré con ello el sistema de enunciados biológicos generalmente aceptados, escritos o impresos. Porque mientras es cierto que la biología, en todo momento, se encuentra en fase de activo crecimiento en los pensamientos de los biólogos que trabajan en cuantos laboratorios pueblan el mundo, estos pensamientos no pueden ser tema de estudio científico hasta que no han sido comunicados con ayuda de marcas sobre el papel.† Sin embargo, la situación se complica además

* Véase Nota 3, pp. 48-9.

† Véase Nota 4, p. 49.

por el hecho de que los enunciados aceptados de una década pueden no ser idénticos a los de la siguiente. Construir una ciencia no es como construir una casa; se requiere también la demolición de los ladrillos colocados. Este es, pues, el segundo miembro del par de tópicos cuyas relaciones hemos de considerar: las leyes que gobiernan el uso del lenguaje al servicio de la ciencia.

Permítaseme aducir algunas de las razones por las cuales, tarde o temprano, se nos imponen las consideraciones metodológicas. En primer lugar, porque la biología, considerada como un sistema de enunciados, se distribuye en un número de lenguajes naturales, inglés, francés, ruso, etc., y estos lenguajes europeos han sido grandemente influidos en su desarrollo por la lógica y la metafísica griegas, así como también por el realismo ingenuo de la vida diaria. En la medida, por tanto, en que puede ser necesario considerar el significado de tales influencias para la ciencia, será asimismo necesario tener en la mente estas peculiaridades de los lenguajes que son vehículo de la ciencia.

Por otra parte, los lenguajes naturales no solamente son usados con el fin de la comunicación en el sentido científico. También se los usa para escribir poesía, para la devoción religiosa, para la controversia política y para la publicidad. Pero estas finalidades imponen al lenguaje unas exigencias que son muy diferentes de las demandadas por la ciencia. Los requisitos de la investigación científica respecto del lenguaje son sorprendentemente parvos, y las excesivas riquezas de un lenguaje natural como el nuestro resultan ser una fuente de embarazo. Porque nos tientan a emplear, tomándolos de usos extra-científicos, instrumentos lingüísticos que pueden acarrear infortunadas consecuencias. Las metáforas, por ejemplo, que abundan en ciertas ramas de la biología, son a menudo sugestivas y pueden ser inocuas si se las toma como lo que son. Pero en el mejor de los casos son vicarios y sustitutos de genuinos enunciados biológicos, y el hecho de que se haya recurrido a ellas es, con seguridad, un signo de inmadurez.

De otro lado, la biología, al igual que otras ciencias, comienza con observaciones de las cosas familiares de la vida diaria, y sus resultados son, al principio, adecuadamente expresados en el lenguaje de la vida diaria. Pero a medida que va avanzando, se amplía el campo de sus operaciones. La invención de hipótesis acertadas trae consigo la invención de nuevos aparatos de observación. Los registros de observación realizados con tales aparatos carecen de sentido si se los considera aparte de la teoría de estos últimos. ¿No es de esperar, entonces, que, tarde o temprano, los hábitos lingüísticos de la vida diaria cesen de hacer justicia a la creciente complejidad de observaciones e hipótesis? Si consideramos el género de actividades en que se han comprometido los hombres, durante el largo período en que han venido desarrollándose los lenguajes naturales, no sorprenderá que estos lenguajes no puedan, sin modificación, cubrir los problemas con los cuales han de habérselas hoy la embriología y la genética. Esta parece ser una razón que explique el hecho de que haya tenido lugar, con tanta frecuencia, el recurso a las metáforas en esas ciencias.

El lenguaje científico no sólo es utilizado en la ciencia con el propósito de la comunicación o para el registro de observaciones y la formulación de hipótesis. También se lo utiliza para facilitar el *cálculo*. Lo cual quiere decir que ha de ser tal que facilite la elaboración de consecuencias a partir de nuestras hipótesis, de

suerte que puedan ser comprobadas. Pero mientras permanezcamos confinados en un lenguaje natural, esos cálculos resultarán excesivamente difíciles y tediosos de realizar a medida que los enunciados se alarguen y compliquen. De este modo nos vemos forzados a la construcción de lenguajes que sean simbólicos, al menos en parte, o a hacer uso de lenguajes de esa índole que hayan sido ya construidos con el fin de suplementar nuestras potencias intuitivas. Con seguridad no es accidental que las dos ciencias que poseen más alto grado de desarrollo son las dos que más uso han hecho de lenguajes simbólicos. Me refiero, sin lugar a dudas, a la física y a la química. Parece razonable suponer que la invención de ecuaciones químicas ha jugado un importante papel en el desarrollo de la química. Y estas ecuaciones, a diferencia de las de la física, no son ecuaciones matemáticas, puesto que contienen símbolos que no pertenecen al vocabulario de la matemática. En una ulterior discusión someteré a la consideración del lector algunas ecuaciones biológicas que, por la misma razón, no son ecuaciones matemáticas. Entre las cosas que la obra de Boole, Frege y sus seguidores pueden hacer por nosotros, figura el suministro de una guía para la construcción de tales lenguajes científicos.

Ya he tenido ocasión de subrayar la distinción entre hablar biología y hablar *sobre* biología, y di el nombre de metodología biológica a la ciencia que habla sobre biología. Pero hay otra pareja de términos de carácter más general, cuyo uso es a menudo conveniente; por esa razón, pese a mi propósito de restringir en lo posible la terminología técnica, pienso que el nuevo par de términos que sigue a continuación es lo suficientemente general y útil como para justificar aquí su introducción. El lenguaje *en que* hablamos puede ser denominado el lenguaje *objeto,* y el lenguaje que utilizamos al hablar *sobre* el lenguaje objeto es llamado entonces su *metalenguaje*. Similarmente, podemos hablar de una teoría y de su metateoría. De este modo la biología será nuestra teoría, y la metodología biológica nuestra metateoría.*

Dentro de un metalenguaje dado se da una ulterior subdivisión, que es de la mayor importancia. Todo lenguaje tiene, al menos, dos aspectos. Por un lado, consta de palabras o de otros signos que, si se combinan de modo apropiado, dan lugar a enunciados. Este es el aspecto estructural o sintáctico. Pero esas palabras o esos otros signos (o algunos de ellos) tienen referencia a algo que no es parte del lenguaje, sino que constituye su materia y su objeto. De ellos se dice que "tienen significado", y de los enunciados construidos a partir de ellos se dice que son verdaderos o falsos. Por esa razón este aspecto es denominado aspecto semántico. Como consecuencia de ello todo metalenguaje tendrá dos ramas: una rama sintáctica que enumera los signos del lenguaje objeto y enuncia las reglas de sus combinaciones significativas y de las transformaciones de esas combinaciones que preservan la verdad de las mismas; y una rama semántica que se ocupa de la conexión entre el lenguaje objeto y la materia sobre la que éste versa, es decir, de las cuestiones de denotación y verdad.

Me apresuraré a añadir que estas distinciones carecen de importancia por lo que respecta a los lenguajes naturales. Desde ambos puntos de vista, tanto el sintáctico, como el semántico, los lenguajes naturales son increíblemente compli-

* Véase Nota 5, p. 49.

cados e irregulares. Las reglas de la gramática ordinaria son sumamente insuficientes desde el punto de vista de las exigencias de la ciencia, y los problemas conectados con el significado y la verdad, en lo que hace a los lenguajes naturales, son enormemente complicados y tal vez insolubles. Así pues, si necesitamos un lenguaje objeto preciso para un determinado propósito científico, nos vemos llevados a construir uno de modo deliberado, utilizando el lenguaje natural como metalenguaje. Los enunciados sintácticos nos dirán qué hay en su interior, y los semánticos nos dirán bajo qué condiciones son verdaderos algunos de los enunciados del lenguaje objeto. De este modo, una reducida porción de terreno selvático queda acotada, arreglada y disponible para su utilización.

Los capítulos que siguen han sido agrupados en tres partes. En la Parte I, explicaré la estructura y clasificación de los enunciados biológicos y la mutua relación que éstos guardan entre sí en el interior de las teorías. En la Parte II, se aplicarán los resultados de la Parte I a determinados problemas metodológicos de genética. Se mostrará cómo es posible construir para la genética un lenguaje, parcialmente simbólico, y cómo el uso de este lenguaje puede clarificar ciertas oscuridades que han sido fuente de controversia en dicha ciencia. En la Parte III, se discutirán algunos problemas metodológicos relacionados con la neurología y ciencias afines.

§ 2. *Clasificación de signos y enunciados biológicos.*

Los signos, en un lenguaje científico, son susceptibles de ser divididos en dos especies distintas: (i) constantes, y (ii) variables. Las constantes son signos con un significado fijo; las variables son signos que carecen por completo de significado, a excepción de ciertos contextos especiales. Por el presente, dejaremos a un lado las variables y nos ocuparemos de las constantes. Estas pueden ser ulteriormente subdivididas en dos especies: (i) las que *nombran* algo individual y concreto (como la palabra 'Venus' en astronomía); y (ii) las que nos dicen *algo acerca de* los objetos nombrados por signos de la primera especie. Un lenguaje muy simple puede construirse utilizando letras minúsculas como nombres individuales, p. ej. *a, b, c,* etc., y letras mayúsculas para palabras de la segunda especie, p. ej. *A, B, C,* etc. En tal caso podrían formarse proposiciones simplemente por yuxtaposición de los signos, así: *Aa, Bab, Cabc,* etc. Estas se distinguen por el número de nombres individuales que contienen, a saber, uno, dos, tres, etc. Así *'Aa'* es del mismo tipo que 'Venus es un planeta', representando *'a'* a 'Venus' y *'A'* a 'planeta'; similarmente, *'Bab'* se ejemplifica por cualquier enunciado que afirme que se da una relación entre dos objetos, como, por ejemplo, 'Tomás es padre de Jorge'. Este tipo de lenguaje ocasiona dificultades cuando tratamos de construir enunciados que afirman algo no acerca de objetos individuales, sino acerca de algo respecto de lo cual se usan palabras como 'paternidad' y otras abstracciones semejantes. En lo que sigue adoptaremos los recursos lingüísticos de la teoría de conjuntos. Utilizaremos la letra griega 'ϵ' para la relación de pertenencia a un conjunto, y los conjuntos serán de diferentes tipos según que sus miembros sean objetos individuales, o conjuntos de objetos individuales, o conjuntos

de conjuntos de objetos individuales.* De aquí pasamos a enunciados relacionales, a los que se considera como aserciones acerca de conjuntos de pares ordenados de objetos individuales (relaciones de dos términos), o conjuntos de triplos ordenados de objetos individuales (relaciones de tres términos), y así sucesivamente. Es asimismo posible disponer de pares, triplos, etc., uno de cuyos miembros es un objeto individual y otro un conjunto, o dos de una especie y uno de otra, y así sucesivamente. Se advertirá que esta actitud con respecto a la construcción de proposiciones subraya el aspecto sintáctico. Palabras como 'animal' pueden ser miradas desde dos puntos de vista. En primer lugar está lo que se denomina el punto de vista intensivo, que considera lo que tiene que ser verdad de un objeto si se le ha de llamar un animal. El segundo punto de vista, o extensivo, considera primariamente a los objetos calificados por el aludido nombre, en otras palabras, al conjunto o clase de todos los animales. Es característico de la matemática tomar el punto de vista de la extensión. Todo esto será mucho más fácil de entender cuando se hayan dado ejemplos interesantes de aplicaciones del método extensional.†

Volviendo ahora la atención de la clasificación de signos a la clasificación de enunciados, podemos dividir a estos últimos en dos grupos mayores que llamaremos: (i) registros de observación, y (ii) enunciados teoréticos. Los registros de observación son el tipo de enunciados que esperaríamos encontrar en los cuadernos de notas que usan los biólogos en el campo y en el laboratorio. Su ideal consiste en no registrar nada más que observaciones con el mínimo de suposiciones. Los registros de observación forman el punto de partida de la teorización biológica y también el punto de contraste al que volvemos tras de nuestros vuelos por el universo de las hipótesis. Los enunciados teoréticos son susceptibles de ser divididos en los siguientes grupos: (i) generalizaciones de registros de observación; (ii) hipótesis explicativas de primer nivel e hipótesis explicativas de segundo y más altos niveles; (iii) teoremas o enunciados que se siguen de las hipótesis explicativas. En la siguiente conferencia proseguiremos con más detenimiento el tópico de los enunciados teoréticos; pero antes tenemos que volver al segundo tipo de signos, denominados variables, que no han sido tratados aún.

La noción de variable está íntimamente conectada con la noción de relación funcional, que juega un importante papel en la ciencia natural; será conveniente, por tanto, considerar juntamente ambas nociones. Si comenzamos con un enunciado tal como

Tomás es padre de Jorge

y reemplazamos por puntos los dos nombres individuales de este modo:

. . . es padre de . . .

obtenemos una expresión que no es ya un enunciado, pero que puede volver a convertirse en un enunciado reemplazando de nuevo los puntos por nombres. Por lo demás, esto puede hacerse de muchísimos modos, puesto que hay muchísimas

* Véase Nota 6, p. 50.
† Véase Nota 7, p. 50.

personas que guardan entre sí la relación de padre a hijo. Tomás puede tener una hija llamada María, de suerte que yo puedo poner:

Tomás es padre de María,

y seguir teniendo todavía un enunciado verdadero. Pero aun cuando, usualmente, hay opción para elegir el nombre que llene el espacio ocupado por los puntos de la derecha, no es este el caso para el espacio de la izquierda, cuando el de la derecha ha sido llenado ya. Si escribimos:

Guillermo es padre de Jorge,

entonces mientras Jorge sea en esta proposición la misma persona que en la primera de las anteriores, o bien Tomás y Guillermo son la misma persona, o bien nuestro último enunciado es falso; porque Jorge sólo puede tener un padre. Ahora bien, si, en lugar de utilizar puntos, utilizamos letras, hacemos uso de variables o seudonombres, como cabe llamarlas, puesto que están ocupando el lugar de nombres sin ser ellas nombres. En tal caso tenemos una expresión

x es padre de y,

que puede ser utilizada con vistas a la expresión de generalizaciones concernientes a la paternidad. Así por ejemplo podemos decir: para cualesquiera nombres que sustituyamos en lugar de x, y, z:

si x es padre de y, y z es padre de y, entonces $x = z$.

Aquí '=' es el signo de identidad estricta, esto es, cualquier nombre que pongamos en sustitución de 'x' nombra a la misma persona que el nombre que pongamos en sustitución de 'z'. Este aspecto es el que hace que esa relación sea funcional. Otro modo de escribirla sería el que sigue. Podríamos utilizar una expresión como '**F** (y)' para 'el padre de y', con lo que tendríamos una expresión designatoria a la que podemos utilizar para formular la relación funcional del siguiente modo:

$$\mathbf{F}\,(y) = x.$$

La expresión '**F** ( )' se llama una función; la variable 'y' es denominada la variable independiente; y 'x' recibe el nombre de variable dependiente. Los objetos cuyos nombres pueden ser puestos en sustitución de 'y' son llamados a veces argumentos de la función o valores de la variable independiente, y los objetos cuyos nombres pueden ser puestos en sustitución de 'x' son llamados valores de la función (para un argumento dado) o valores de la variable dependiente. Pero aun cuando las relaciones funcionales tienen casi siempre sólo una variable dependiente, pueden tener bastante más de una variable independiente.

Por ejemplo, si yo deseo expresar el enunciado

> la temperatura del señor López a las 8 de la mañana del 10 de mayo de 1960 es de 37,7 °C

en la forma de una relación funcional con variables en lugar de nombres y expresiones designatorias, podría escribir:

$$\mathbf{T_C}\,(t, y) = z,$$

en la que '$\mathbf{T_c}$' es el signo funcional, indicando '**c**' la escala según la cual se ha medido la temperatura, siendo '*x*' una variable independiente susceptible de ser sustituida por nombres de personas, siendo '*y*' una segunda variable independiente susceptible de ser sustituida por designaciones temporales, y siendo, finalmente, '*z*' la variable dependiente, susceptible de ser sustituida por la lectura del termómetro cuando se efectúe la comprobación. Aquí tenemos, pues, un ejemplo de relación funcional con *dos* variables independientes. Posteriormente encontraremos relaciones funcionales con un número todavía mayor de variables independientes. Este ejemplo ilustra, por tanto, el modo según el cual pueden expresar las funciones los resultados de las comprobaciones, siendo usualmente estos métodos e instrumentos para determinar el valor de la variable dependiente para valores dados de las otras variables en una relación funcional.

En biología encontramos, frecuentemente, expresiones de la forma

$$x \text{ determina a } y \quad \text{o} \quad x \text{ causa a } y$$

como método para expresar relaciones causales. Pero ello sería, obviamente, adecuado sólo si se diese la condición de que todas las relaciones causales fueran relaciones funcionales que únicamente contasen con una variable independiente, lo cual está muy lejos de ser el caso en la biología. Más tarde volveremos sobre este punto.

Además de funciones y relaciones funcionales, encontraremos a veces la palabra 'funtor'. Así por ejemplo en los enunciados:

Venus es un planeta
Tomás es el padre de Jorge
York está entre Londres y Edimburgo,

mientras 'Venus', 'Tomás', 'Londres', etc., son nombres individuales, las expresiones 'es un planeta', 'es padre de' y 'está entre . . . y . . .' pueden ser denominados funtores, de grado uno, dos y tres respectivamente. En ocasiones, esta terminología resulta útil.

CAPITULO II

§ 1. *Enunciados teoréticos.*

En la anterior conferencia se contrapusieron los enunciados teoréticos a los registros de observación. La diferencia entre unos y otros se encuentra en el hecho de que los primeros no contienen nombres individuales: son enunciados generales, no enunciados acerca de objetos particulares. Al denominarlos enunciados teoréticos no deseo sugerir que los registros de observación *no* sean en sentido alguno teoréticos, sino sólo que, en ciencia natural, son usualmente adoptados como enunciados básicos mediante los cuales otros son comprobados. Dentro de la ciencia natural, su ulterior justificación no suele discutirse.

Los enunciados teoréticos del tipo más simple son los que denominaré *generalizaciones* de registros de observación. William Harvey halló, en los animales sobre los cuales experimentaba, que el brote de sangre de una arteria punzada seguía inmediatamente a la sístole del corazón, no a la diástole, como creían sus contemporáneos. De estas observaciones sobre vertebrados *particulares* pasó al enunciado general de que así era en *todo* vertebrado. Las observaciones de Pasteur sobre la correlación entre la invasión del cuerpo por microorganismos y ciertas condiciones mórbidas, condujo a la generalización de que *toda* condición mórbida guardaba esa correlación con la invasión de una cierta especie de parásitos. Esta generalización resultó más tarde falseada por el descubrimiento de las enfermedades deficitarias, aun cuando sólo después de una prolongada controversia, durante la cual se esgrimió el curioso argumento de que "una condición *positiva* de enfermedad no podría ser causada por un factor *negativo* tal como una deficiencia en la dieta"* —pese al hecho de que, por espacio de centurias, el género humano se ha tenido que familiarizar más de la cuenta con la enfermedad deficitaria conocida (al menos por el laico) como inanición.

El rasgo característico de este tipo de enunciados teoréticos es así el paso de un número finito de registros de observación, a un enunciado que parece versar sobre un inaccesible *todos*. 'Toda rata tiene dos padres' es una generalización (de una multitud de registros de observación), que no *sabemos* si es verdadera, puesto que no podemos examinar todas las ratas.

Pero el conjunto de los enunciados teoréticos en biología no queda en absoluto agotado por las generalizaciones de registros de observación. Cuando en una rama de la investigación se ha logrado establecer un determinado número de

---

* J. C. Drummond and A. Wilbrahan, *The Englishman's Food* (1940), p. 320.

generalizaciones de esta índole, puede que resulte posible la construcción de un enunciado tal que todas esas generalizaciones (y muchas otras) *se sigan de* él como necesarias consecuencias. A estos enunciados teoréticos adicionales los llamo *hipótesis explicativas* de *primer orden* o *nivel.*

Pero el proceso de construcción de la teoría no termina aquí. Con el desarrollo ulterior de la rama particular de la ciencia en cuestión, puede haberse llegado al establecimiento de un cierto número de tales hipótesis explicativas, y en ese caso puede resultar posible —si nuestra potencia de inventiva es equiparable a la tarea— la repetición del primer proceso mediante la introducción de un nuevo enunciado teorético que tenga a todas las hipótesis de primer orden entre sus necesarias consecuencias. Así obtenemos hipótesis explicativas de *segundo orden* o *nivel.* Es claro que este proceso puede ser, en principio, continuado indefinidamente.

De este modo queda construida una pirámide, a base de capas de hipótesis, siendo cada miembro de un nivel dado (y siempre que no se trate del nivel máximo) una consecuencia de, al menos, un miembro del nivel inmediatamente superior. A las generalizaciones de registros de observación las llamamos *hipótesis* (aunque no hipótesis explicativas) de *nivel cero.* Todos los enunciados pertenecientes a la pirámide son hipótesis en el sentido de que cada uno *dice más* de lo que se afirma en los enunciados que han sugerido su introducción.

Podemos así distinguir tres papeles que juegan las hipótesis en la ciencia: (1) en primer lugar juegan un papel clasificador, reuniendo las generalizaciones en grupos más y más amplios; (2) por virtud de los lazos así establecidos entre ellas, cada generalización recibe un soporte mucho más amplio del que obtiene de los registros de observación en los que directamente se basa. De este modo la generalización 'Todo mamífero adulto tiene un corazón', es una consecuencia de ciertas hipótesis fisiológicas apoyadas sobre una base harto más amplia que los registros de observación en los que se afirma que al abrir ciertos mamíferos se ha hallado en su interior un corazón. Hoy día nos resultaría muy difícil tomar en serio el relato de que alguien ha disecado un mamífero y no encontrado el corazón. Pero en tiempos antiguos, cuando no se disponía de la conveniente teoría fisiológica, no era así. Plutarco al menos, en su vida de Julio César, consideró digno de registrar que, poco antes de su asesinato

> el propio César, sacrificando también a la diosa, halló que una de las bestias sacrificadas carecía de corazón: acontecimiento extraño en la naturaleza, cómo una bestia podía vivir sin corazón;*

(3) las hipótesis juegan un papel directivo: proporcionan un estímulo para la ulterior investigación, al desafiar cualquier intento de falseamiento, y suministran a la par una dirección a tal esfuerzo, puesto que sus inesperadas consecuencias sugerirán nuevos experimentos; (4) unas palabras de advertencia debieran añadirse a esta enumeración de papeles jugados por las hipótesis en la ciencia natural. La historia de la biología ilustra el hecho de que las hipótesis que obtienen éxito pueden acarrear un efecto oscurecedor al dirigir la investigación por los canales que les son favorables, y desviarla de aquéllos que les son desfavorables. Ello

---

* Traducción de Sir Thomas North.

puede fácilmente llevar consigo el efecto de retrasar nuevos descubrimientos de importancia.

Creo necesario advertir que utilizo las palabras 'hipótesis' y 'teoría' en un sentido algo distinto al uso común. Es muy frecuente que una hipótesis sea llamada así, hipótesis, sólo mientras es joven y no ha sido lo suficientemente comprobada. Transcurrido un cierto período, y tras haber hecho frente a una copiosa serie de comprobaciones, puede ser llamada una *teoría*. Y cuando el tiempo de su aceptación se prolonga lo bastante, puede, finalmente, ser llamada un *hecho*. Así oímos hablar a veces, verbigracia, del hecho de la evolución. La hipótesis evolucionista constituye un interesante ejemplo de hipótesis científica que no fue aceptada hasta después de haber sido introducida otra de orden superior, es decir, la hipótesis de la selección natural. Pero es, sin duda, claro que una hipótesis no cesa de ser una hipótesis simplemente por el hecho de haber sido comprobada y creída por gran cantidad de personas. De acuerdo con ello afirmo que una hipótesis es tal de una vez por todas, si bien no niego que algunas hipótesis hayan hecho frente a la comprobación más largo tiempo que otras, y que pueda ser útil indicar esta circunstancia mediante un cambio de nombre. Por *teoría* entenderé, no una hipótesis aislada, sino un sistema de hipótesis conectadas por la relación de consecuencia.

§ 2. *La relación de consecuencia. Operaciones sobre enunciados.*

Antes de que podamos tratar acerca de la estructura de los enunciados teoréticos, o acerca de la relación *seguirse de* en la pirámide constitutiva de una teoría, es preciso decir algo acerca de otro tópico que concierne tanto a los registros de observación como a los enunciados teoréticos. Hasta el presente hemos considerado a los enunciados como unidades carentes de partes propias que sean a su vez enunciados. Ahora hemos de considerar cómo pueden combinarse para formar *enunciados compuestos*. A efectos científicos, hay *cinco operaciones sobre enunciados* de uso común. Una es una operación que se efectúa sobre *un solo* enunciado, mientras que el resto liga conjuntamente *dos* enunciados.

(1) La introducción de 'no' en un enunciado (en el lugar prescrito por las reglas sintácticas del lenguaje que estemos utilizando) da lugar a un nuevo enunciado denominado *negación* o denegación del anterior enunciado.

(2) La unión de dos enunciados mediante 'y' da lugar a un nuevo enunciado denominado *conjunción* de los anteriores.

(3) La unión de dos enunciados mediante 'o' da lugar a un nuevo enunciado denominado *disyunción* de los anteriores.

(4) Al llenar los espacios en blanco de 'si . . . , entonces . . .' con dos enunciados se da lugar a un nuevo enunciado denominado *condicional* de los anteriores. Ello puede llevarse a cabo de dos modos, dando lugar a dos condicionales distintos, según cuál sea el enunciado que ocupe el primer espacio en blanco. El enunciado que ocupa el primer espacio en blanco se llama el *antecedente*, y el que ocupa el segundo, el *consiguiente*.

(5) Al llenar los espacios en blanco de '. . . si y sólo si . . .' con dos enunciados,

se da lugar a un nuevo enunciado denominado *bicondicional* de los anteriores, siendo en ese caso indiferente el orden de los mismos.

Estas operaciones pueden, como es manifiesto, ser indefinidamente repetidas aplicándolas a cualquiera de sus resultados, para producir así enunciados de creciente complejidad.

Voy a dar aquí por supuesto –y probaré en subsiguientes conferencias– que los únicos modos de composición de enunciados que se necesitan, a efectos científicos, son los cinco que acabo de indicar. Ello es importante, entre otras, por las siguientes razones. Para determinar si un enunciado compuesto a base de esos modos es verdadero o falso, cualquiera que sea su grado de complicación, es suficiente saber si es verdadera o falsa cada una de las unidades enunciativas que lo constituyen. De este modo, si sé que un enunciado '*A*' es verdadero, sé, por tanto, que su negación es falsa. Si sé que un enunciado '*A*' y otro enunciado '*B*' son ambos verdaderos, sabré por tanto que su disyunción '*A* o *B*', como su conjunción '*A* y *B*' son verdaderas. Mas si únicamente sé que es verdad uno de ellos, sabré que lo es su disyunción, pero nada podré decir acerca de su conjunción. La interpretación del condicional puede dar lugar, al principio, a confusión y malentendimiento, debido al casi irresistible impulso a leer en él más de lo que pretende significar. En el uso científico del lenguaje, se entiende que un condicional es verdadero bajo todas las condiciones excepto una, a saber, cuando el antecedente es verdadero y el consiguiente falso. Es decir, que 'si *A*, entonces *B*' es verdadero en cualquier caso, excepto cuando '*A*' es verdadero y '*B*' es falso.* Un bicondicional es verdadero cuando sus dos enunciados constituyentes son verdaderos y también cuando ambos son falsos.

Expresiones como 'no *A*', '*A* y *B*', '*A* o *B*', 'si *A*, entonces *B*' y '*A* si y sólo si *B*', en las que '*A*' y '*B*' son letras carentes de sentido que ocupan espacios que de otro modo irían en blanco, reciben el nombre de *funciones de verdad*, porque cuando dichas letras, o variables independientes, son reemplazadas por enunciados, entonces resulta que lo que se llama el *valor de verdad* de la función es verdad o falsedad.

Las condiciones bajo las cuales son verdaderos o falsos los enunciados compuestos pueden ser óptimamente exhibidas por medio de tablas llamadas *tablas de verdad*. A continuación se dan las tablas para las cuatro operaciones binarias:

(1)			(2)			(3)			(4)		
A	y	*B*	*A*	o	*B*	*A*	⊃	*B*	*A*	≡	*B*
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*

Estas tablas se construyen como sigue: en primer lugar escribimos, bajo las letras que representan los dos enunciados, las cuatro combinaciones posibles de verdad (*V*) y falsedad (*F*); y luego, en la columna situada bajo el signo de operación, indicamos si el compuesto, globalmente considerado, es verdadero o falso para

* Véase Nota 8, p. 50.

cada una de las cuatro posibilidades mentadas. En lugar de 'si . . . , entonces . . .' y de '. . . si y sólo si . . .', he utilizado, respectivamente, los símbolos habituales '⊃' y '≡', al objeto de que figure un solo signo entre las variables y alinear sus correspondientes tablas con las de 'y' y 'o'. Estas tablas fijan, por consiguiente, el sentido o uso de las palabras 'y', 'o', 'si . . . , entonces . . .' y '. . . si y sólo si . . .' a efectos científicos.

Podemos utilizar las tablas de verdad para determinar las condiciones de verdad de *cualquier* compuesto construido conforme a los indicados modos. Convengamos en formar la negación de un enunciado escribiendo simplemente 'no' al frente de él. Entonces podemos construir la tabla (5) para '(no *A*) o *B*' como sigue: la columna que figura bajo 'no *A*' tendrá *'F'* donde la columna correspondiente a *'A'* en las otras tablas tuviera *'V'*, y *'V'* donde dicha columna tuviera *'F'*. El compuesto, globalmente considerado, es una disyunción, y tendrá *'F'* sólo donde 'no *A*' y *'B'* tengan simultáneamente *'F'*. Ello ocurrirá en la tercera línea, empezando a contar desde arriba. Una comparación con la tabla (3) muestra que 'si *A*, entonces *B*' y '(no *A*) o *B*' tienen las mismas condiciones de verdad.

(no *A*)	o	*B*
F	*V*	*V*
V	*V*	*V*
F	*F*	*F*
V	*F*	*F*

Consideremos ahora el *bicondicional* de '(no *A*) o *B*' y 'si *A*, entonces *B*'. La tabla (4) muestra que dicho condicional tendrá *'V'* siempre que las líneas correspondientes de las columnas situadas bajo '(no *A*) o *B*' y bajo 'si *A*, entonces *B*' tengan ambas una *'V'* o tengan ambas una *'F'*. Mas comoquiera que esas dos columnas son idénticas, este habrá de ser el caso para *toda línea.* Consiguientemente, tendremos un enunciado compuesto cuya columna central contiene *sólo 'V'*. En otras palabras, dicho enunciado ha de ser verdadero para *todas* las posibilidades, independientemente de la verdad de *'A'* y *'B'*. Cuando el bicondicional de dos enunciados es verdadero, se dice que esos dos enunciados son *equivalentes.* Cuando el bicondicional en cuestión es verdadero independientemente de la verdad de sus dos enunciados, se dice que éstos son *analíticamente* equivalentes.

Cuando dos compuestos son analíticamente equivalentes, cada uno se sigue del otro, y cualquiera de ellos puede ser sustituido por el otro sin que se altere el valor de verdad del compuesto, cualquiera que éste sea, en que el elemento sustituido pueda ocurrir; es decir, el compuesto en cuestión seguirá siendo verdadero si lo era antes de la sustitución, y falso si antes era falso.

Además de los bicondicionales analíticos, pueden darse también los condicionales analíticos, que son verdaderos independientemente de la verdad de los enunciados constituyentes. En tal caso el consiguiente se sigue del antecedente.

Comoquiera que dos compuestos han de ser analíticamente equivalentes cuando son idénticas las columnas de sus condiciones de verdad, todo compuesto que no tenga *'F'* en su columna es analíticamente equivalente a cualquier disyunción de la forma: '*A* o (no *A*)', que carece, por su parte, de *'F'* en su columna. Una tal disyunción recibe el nombre de *tautología*, y

cualquier enunciado que sea analíticamente equivalente a ella es asimismo llamado tautología.

Es fácil mostrar que los siguientes enunciados son tautologías:

(1) *A* si y sólo si no (no (*A*)).

Este es el principio de doble negación.

(2) (Si *A*, entonces *B*) si y sólo si (si no (*B*), entonces no (*A*)).

Este es el principio de transposición.

(3) Si (si (*A* y *B*), entonces *C*), entonces (si *A*, entonces (si *B*, entonces *C*)).

Este es el principio de exportación.

(4) Si (si *A*, entonces (si *B*, entonces *C*)), entonces (si (*A* y *B*), entonces *C*).

Este es el principio de importación.

(5) Si (*A* y (si *A*, entonces *B*)), entonces *B*.

Por otra parte, no es el caso de que la fórmula que sigue sea una tautología:

Si ((si *A*, entonces *B*) y *B*), entonces *A*.

Ello se demuestra con las siguientes tablas de verdad:

(*A*	y	(*A*⊃*B*))	⊃	*B*
V	*V*	*VVV*	*V*	*V*
F	*F*	*FVV*	*V*	*V*
V	*F*	*VFF*	*V*	*F*
F	*F*	*FVF*	*V*	*F*

((*A*⊃*B*)	y	*B*)	⊃	*A*
VVV	*V*	*V*	*V*	*V*
FVV	*V*	*V*	*F*	*F*
VFF	*F*	*F*	*V*	*V*
FVF	*F*	*F*	*V*	*F*

Consiguientemente, si en una teoría científica tenemos un enunciado de la forma 'si *A*, entonces *B*' y obtenemos '*B*', no podemos inferir que '*A*' sea verdad.* Esto es importante y debería ser más sabido de lo que parece ser entre los biólogos. En cambio, si obtenemos 'no *B*', podemos decir, por el principio de transposición, que '*A*' es falso.

(6) Si (si *A*, entonces *B*) y (si *B*, entonces *C*), entonces (si *A*, entonces *C*).

Este es el que en *Principia Mathematica* se denomina principio del silogismo.

Puede preguntarse: ¿cuál es el uso de las tautologías en la ciencia natural? La respuesta es que se las puede usar del mismo modo que se usa cualquier fórmula matemática. Es decir, podemos utilizarlas para transformar un enunciado en otro enunciado, con la seguridad de que, si el enunciado inicial es verdadero, lo será también el resultante de la transformación. Dicho en otras palabras, el último de estos enunciados se sigue del primero, o es una consecuencia suya, de suerte que, si admitimos a ese primero en nuestra teoría, hemos de admitir también al segundo. Esto se lleva a cabo sustituyendo las expresiones no especificadas '*A*' y '*B*' de las fórmulas generales por correspondientes enunciados biológicos. Pero hay

* Véase la cita de Lord Russell en la Nota 11, p. 52.

otro modo según el cual es posible usar las tautologías. Podemos utilizarlas para formular, en nuestro *metalenguaje,* reglas que nos indican qué operaciones preservadoras de verdad podemos realizar sobre los enunciados de nuestro lenguaje objeto. Mencionaré dos de estas reglas, que he de usar más tarde en ulterior ejemplo:

(1) *Regla de Adjunción.* Si *'A'* y *'B'* son enunciados aceptados en una teoría científica, entonces *'A* y *B'* es también un enunciado aceptado en esa teoría.

(2) *Regla de Abrupción.* Si el antecedente de un enunciado condicional y el condicional mismo son enunciados aceptados en una teoría científica, entonces el consiguiente de ese condicional es también un enunciado aceptado de tal teoría. Esta regla se basa en la quinta de las tautologías antes indicadas.

Pudiera pensarse que no es posible obtener resultado alguno de importancia apoyándose en el uso de reglas y tautologías tan obvias. Pero este su carácter obvio es su mérito principal. Se ha comprobado que, merced al repetido uso de tales principios y algunos otros aún no mencionados, podemos derivar las consecuencias de sistemas de enunciados de cualquier grado de complejidad, consecuencias que frecuentemente distan mucho de ser obvias y que incluso pueden ser negadas sobre la base de la sola intuición.

Las especiales peculiaridades de los enunciados generales, que aún no se han mencionado, exigen ciertas reglas adicionales. Porque la discusión de la estructura de los enunciados generales ha sido pospuesta a la explicación de las cinco operaciones sobre enunciados. Pero ahora es el momento de volver a este tópico.

§ 3. *La estructura de los enunciados generales.*

En nuestro idioma los enunciados generales son comúnmente expresados de la manera que sigue:

Toda rata tiene dos padres.

¿Cómo podemos expresar tales enunciados de una forma que muestre la conexión entre su estructura y la de los registros de observación? Esto puede ser llevado a cabo mediante el uso de variables en lugar de nombres individuales. Así por ejemplo en el enunciado

Tomás es calvo,

podemos reemplazar a 'Tomás' por la letra *'x'* y obtener la expresión

x es calvo,

que no es, claramente, un enunciado, tal y como la expresión

él es calvo

tampoco es, tomada aisladamente, un enunciado. Mas así como es posible construir un enunciado con 'él es calvo', introduciendo esta expresión en un contexto adecuado, así también es posible construir un enunciado a partir

de 'x es calvo', escribiendo delante un prefijo especial. De este modo, si escribo

para todo x, x es calvo,

obtendré un enunciado que expresa lo que podría expresarse escribiendo

todos son calvos,

que es un enunciado general.

La expresión 'x es calvo' retiene aún la forma de un registro de observación construido con la ayuda de un funtor de grado 1. Unicamente difiere de un registro de observación por presentar una variable o seudonombre en el lugar de un nombre genuino.

Una expresión que se componga del correspondiente funtor, acoplado con una o más variables según el grado del mismo, recibe el nombre de *función proposicional*. Así por ejemplo: 'Tomás ama a y', 'x ama a y', 'Tomás está sentado entre Santiago y z', 'x está sentado entre y y z' son funciones proposicionales. Una tal función se convierte en un enunciado cuando, para *cada una* de sus variables, o bien (1) se la sustituye por un nombre auténtico, o bien (2) se escribe al frente de la expresión un determinado prefijo que contenga la variable en cuestión. Así 'Tomás ama a y' se convierte en un enunciado si 'María' reemplaza a 'y'; y asimismo cuando escribo a su frente 'para todo y'. En el último caso obtengo un enunciado general que afirma que Tomás ama a todo el mundo. Un tal prefijo recibe el nombre de *cuantificador*, y de una variable se dice que está *ligada* cuando figura a un mismo tiempo en una matriz y en un cuantificador antepuesto a ella como prefijo. De una variable no cuantificada se dice que está *libre*.

Ahora hemos de volver a la cuestión de las operaciones sobre enunciados generales. Las cinco operaciones ya explicadas pueden ser, todas por igual, aplicadas a enunciados generales, pero el uso de la negación requiere especial consideración. Obedeciendo a la regla sintáctica de que la negación de un enunciado debe ser construida escribiendo 'no' a su frente, la negación de

para todo y, Tomás ama a y (1)

será

no (para todo y, Tomás ama a y); (2)

ahora bien, el equivalente castellano habitual de (1) es

Tomás ama a todo el mundo (3)

y el equivalente castellano habitual de (2) es

Tomás no ama a todo el mundo, (4)

pero ello podría ser establecido también en la forma

existe alguien a quien Tomás no ama (5)

y de este modo podemos construir un enunciado equivalente a partir de la función 'Tomás ama a y', escribiendo primero 'no' a su frente

y colocándole luego delante un *nuevo* tipo de prefijo que contenga a '*y*':

existe un *y* tal que, no (Tomás ama a *y*). (6)

Ello es, sin duda, deplorable desde el punto de vista de la gramática ordinaria, pero es una buena sintaxis científica.*

Pero (6) introduce una serie de nuevos aspectos. En primer lugar está la aplicación de una de las operaciones sobre enunciados, a saber, la negación, a una función proposicional en vez de a un enunciado. Ello puede asimismo hacerse extensivo a las otras cuatro operaciones, lo que nos permite construir funciones compuestas tales como 'si (*x* es calvo) entonces (Tomás ama a *y*)'. El segundo de estos aspectos es el nuevo tipo de prefijo cuantificacional, cuyo uso introduce un nuevo tipo de enunciado general. Porque (6) es un enunciado general, ya que contiene una variable ligada. Dicho enunciado difiere de (1) por contener 'alguno' en lugar de 'todo'. Para distinguir estos dos tipos de enunciado general, (1) recibe el nombre de *enunciado universal*, y su cuantificador, el de *cuantificador universal*, mientras se llama *enunciado existencial* y *cuantificador existencial*, respectivamente, a (6) y su cuantificador. Sin embargo, un nuevo cuantificador no es, en principio, necesario, puesto que cualquiera de ellos puede ser definido con ayuda del otro y de 'no'.

De las anteriores consideraciones puede seguirse que todo cuanto se requiere, en principio, para la construcción de enunciados generales se reduce a: (1) cuantificadores universales, y (2) la aplicación a matrices de las cinco operaciones sobre enunciados. Pero en la práctica es conveniente también utilizar cuantificadores existenciales y emplear los símbolos '(x)' y '$(\exists x)$' como abreviaturas de 'para todo *x*' y 'para algún *x*', respectivamente. Tratemos de formular, de acuerdo con estos principios, el enunciado general de biología 'toda rata tiene dos padres'. Esto se puede hacer como sigue:

Para todo *x*, si *x* es una rata, entonces hay un *y* y un *z* tales que *y* es distinto de *z* e *y* es padre de *x* y *z* es padre de *x*.

Esta expresión puede, empero, ser considerablemente abreviada si se utilizan letras solas para designar los funtores que intervienen en ella. Utilicemos '*R*' y '*P*' para denotar, respectivamente, el conjunto de las ratas y 'es padre de'. En tal caso, y recurriendo además a las abreviaturas antes indicadas, el enunciado en cuestión resulta:

$$(x)\ (\text{si } x \in R, \text{ entonces } (\exists y)\ (\exists z)\ (y \neq z\ \&\ yPx\ \&\ zPx)).^{\dagger}$$

Este enunciado tiene la forma de una ley natural, puesto que contiene un condicional compuesto de matrices que presentan, por lo menos, una variable universalmente cuantificada. Semejante formulación no excluye la posibilidad de que una rata tenga más de dos padres, pero tampoco el enunciado original la excluía. Cualquiera que sea su intención, no es *decir* que una rata tiene *sólo* dos padres.

Se advertirá que, sin dar explicación al respecto, he utilizado paréntesis para indicar el alcance de los cuantificadores. Pueden formularse reglas que

* Véase Nota 9, pp. 50-1.

† Conviene advertir al lector que en el curso del libro encontrará indistintamente representada la función de conjunción por la partícula castellana "y" o los símbolos "&" o "·". (T.)

gobiernan su uso, mas para mi presente propósito no es necesario decir nada sobre ellas.

Daré ahora por supuesto, y en futuras conferencias probaré, que todos los enunciados teoréticos en biología pueden ser formulados con la sola ayuda de:

(1) Las cinco operaciones sobre enunciados,
(2) la cuantificación universal,
(3) identidad estricta (=),
(4) paréntesis,
(5) variables individuales,
(6) los signos numéricos usuales,
(7) variables cuyos valores son números naturales y racionales,
(8) funtores biológicos, de varios grados, junto con funtores tomados de otras ciencias según proceda,
(9) variables cuyos valores son conjuntos de varios tipos.

Si esto resulta ser factible, poseeremos una base pormenorizadamente analizada para un lenguaje biológico, que es mucho más simple y controlable que el indómito lenguaje natural. Estaremos capacitados para eliminar una enorme proporción de innecesaria verbosidad y evitar las añagazas que nos tiende el lenguaje natural. Este procedimiento tendrá el mérito de hacer más fáciles de descubrir los errores y más fácil la tarea del cálculo, puesto que pone la forma en evidencia. Más tarde se verán otras ventajas.

Las palabras o signos de otra índole que se requieran para un tal lenguaje, pueden ser divididos en dos conjuntos: a un conjunto pertenecen los signos mencionados en los puntos (1) a (5), (7) y (9) en la anterior lista; puede denominárseles signos *formativos*. Al segundo conjunto pertenecen los mencionados en (8), a los que se puede denominar signos *descriptivos*, o materiales. Veremos que esta distinción es importante.

Ahora hemos de volver a la cuestión: ¿cómo puede ser cierto que un enunciado dado sea *consecuencia de* otro o de otros; o, dicho en otras palabras, que ese otro o esos otros *nos fuercen a* aceptarlo? Hemos visto que es de esta relación de consecuencia de lo que depende la ordenación de los enunciados en una teoría científica. Pero hasta el presente sólo se ha dado una respuesta parcial a esta cuestión. Antes dije que cuando sólo están en juego las cinco operaciones sobre enunciados, podemos afirmar que cualquiera de los miembros de un bicondicional tautológico se sigue del otro, y que el consiguiente de un condicional tautológico se sigue del antecedente.

Esto se aplica lo mismo a los enunciados generales que a los registros de observación mientras no se involucre la estructura de los primeros. Mas con frecuencia surgen casos en que es necesario tener en cuenta dicha estructura. Para un pleno tratamiento de los enunciados generales resulta preciso: (1) disponer de reglas de manipulación de los cuantificadores, y (2) extender los principios de las tablas de verdad a las funciones proposicionales. Por lo que hace a la manipulación de enunciados generales, ésta consiste en remover primero los cuantificadores, operar después sobre las funciones proposicionales resultantes de acuerdo con los principios y reglas metalingüísticos ya aducidos para las cinco operaciones sobre enunciados, y restablecer finalmente los cuantificadores. Puesto que hay

dos tipos de cuantificadores en uso, habrá dos reglas de remoción y dos de inserción. Para mi propósito será suficiente dar tan sólo las reglas del cuantificador universal (representado por '(v)', donde v es una variable):

Regla I. Partiendo de cualquier enunciado de la forma

Si A, entonces (v) (B),

podemos obtener

Si A, entonces B.

Regla II. Si la variable v no está libre en A, entonces partiendo de una fórmula de la forma

Si A, entonces B,

podemos obtener

Si A, entonces (v) (B).

Muy en breve se dará un ejemplo ilustrativo del uso de estas reglas y de la aplicación de las cinco operaciones sobre enunciados a funciones proposicionales.

Ahora es posible indicar lo que se entiende por lógica como resultado de la obra de Boole, Frege y sus seguidores. En primer lugar tenemos el sistema de tautologías, que envuelven tan sólo las cinco operaciones sobre enunciados, o conectivas proposicionales como se las llama también. Esto constituye el cálculo proposicional. Si a ello añadimos el sistema de fórmulas que pueden ser obtenidas mediante el uso de las reglas adicionales de manipulación de cuantificadores y funciones proposicionales, resultará lo que se denomina el cálculo funcional elemental. Si admitimos variables susceptibles de ser sustituidas por funtores y formamos con ellas funciones proposicionales con funtores de orden superior, para aplicarles los mismos principios de cuantificación, obtenemos un nuevo plantel de fórmulas que forman en su totalidad lo que se denomina el cálculo funcional superior. Estos tres cálculos constituyen la lógica.

El único modo de aprender estos cálculos consiste en usarlos. Mi principal intención al decir cuanto he dicho acerca de ellos, ha sido mostrar a los biólogos que existe una tal técnica para la derivación de consecuencias. Al presente la derivación de consecuencias en biología se lleva a cabo o bien por medio de aquellas partes de la matemática que son más familiares, o bien sin otra ayuda que la intuición. El cálculo funcional y el álgebra booleana (que será introducida más tarde) hacen posible la aplicación a problemas biológicos de un método matemático de carácter no numérico. La intuición, sin ninguna otra ayuda, ha hecho maravillas en el pasado y nada puede ocupar su lugar. Sin embargo no es infalible, y hay, presumiblemente, un límite a la complejidad con la que incluso la más brillante intuición pueda rivalizar. Es útil, por consiguiente, disponer de medios merced a los cuales pueda ser extendido el alcance y comprobados los resultados de la intuición.

Para concretar cuanto he dicho acerca de la estructura de las teorías biológicas, propongo examinar ahora una parte de un espécimen de las mismas. A este propósito, tomo los siguientes enunciados del segundo capítulo de la celebrada

obra de William Harvey *Disquisición anatómica sobre el movimiento del corazón y la sangre en los animales.*

[G.1] Hay un tiempo en que el corazón se mueve y un tiempo en el que permanece inmóvil.

[G.2] Durante su movimiento el corazón se endereza, se eleva hasta un extremo y la pulsación se percibe desde el exterior.

[G.3] Durante su movimiento, el corazón se contrae totalmente y queda más encogido.

[G.4] Durante su movimiento, el corazón se torna más duro al tacto.

[G.5] Al tiempo en que se mueve, el corazón se torna más pálido de color; cuando está en reposo, tiene un color rojo sangre más intenso.

De estas particularidades parecióme evidente que

[H.1] El movimiento del corazón consiste en una cierta tensión generalizada, que es tanto contracción en la línea de sus fibras como constricción en todos sentidos.

[H.2] El movimiento del corazón es enteramente de la misma naturaleza que el de los músculos al contraerse;

pues

[G.6] Los músculos, al entrar en acción, adquieren rigor y tensión, y de blandos se tornan duros, prominentes y densos.

Por consiguiente nos consideramos autorizados a concluir que

[H.3] El corazón, en el momento de su actividad, contráese al punto totalmente, engrosa sus paredes, disminuye sus ventrículos y queda así dispuesto para proyectar o expeler su carga sanguínea.

Ello queda suficientemente manifiesto por virtud de (5). Y no es posible la duda al respecto, porque

[G.7] Si se perfora el corazón hasta llegar al ventrículo, se observará que, a cada pulsación o movimiento que lo tensa, la sangre es proyectada con fuerza hacia fuera.

Se advertirá que, en este extracto, hay siete generalizaciones o hipótesis de nivel cero (G.1-G.7) y tres hipótesis explicativas (H.1-H.3), aun cuando estas últimas han sido tan sobradamente confirmadas desde entonces, que resulta difícil para nosotros considerarlas como hipótesis o apreciar la magnitud de la empresa de Harvey al introducirlas. Asimismo figuran los enunciados metateoréticos, que aparecen impresos en itálicas. La fraseología de estos últimos parece sugerir que Harvey creía que las hipótesis se siguen de las generalizaciones. Pero si este hubiera sido el caso, y la intuición hubiera sido suficiente para determinar cuándo un enunciado se sigue de otro, sería difícil entender por qué los contemporáneos de Harvey fueron tan remisos en aceptar su teoría.* Esta

* Véase Nota 10, p. 51.

dificultad desaparece si recordamos que por aquel tiempo el método de las hipótesis no era generalmente entendido, y si nos percatamos de que la relación *seguirse de* vale sólo a partir de una hipótesis de nivel n con respecto a otra de nivel $n-1$, o de nivel aún más bajo, pero no viceversa.

La cuestión quedará más clara si trasladamos las frases de Harvey a un lenguaje actual. Lo que Harvey sostiene en sus hipótesis es que

Todo corazón es una bomba muscular intermitente.

Esta proposición puede ser desglosada en dos hipótesis:

[H. I] Todo corazón es muscular.

[H.II] Todo corazón es una bomba intermitente de sangre.

De este modo, de H.I y G.6 (y ciertas generalizaciones más, concernientes a los músculos, que Harvey da por supuestas sin mencionar), se sigue parte de las generalizaciones 2-4. De H.II y ciertas generalizaciones relativas a las bombas (que Harvey supone también sin mencionar), se siguen las generalizaciones 1, 5 y 7. El éxito de Harvey dependió, en gran medida, del hecho de haber abordado sus problemas tal y como lo hubiera hecho un lampista ilustrado, aplicando a su tarea ciertas generalizaciones técnicas sobre bombas y circulación de fluidos a través de tubos, de las cuales jamás hizo mención, aun cuando le eran absolutamente necesarias para su teoría. Presumiblemente, sus contemporáneos no compartieron tal punto de vista –Galeno había negado que el corazón fuese un músculo–, y ello puede haber sido un motivo más de que sus teorías no fuesen aceptadas antes.

Al objeto de ilustrar el uso del cálculo funcional elemental con un sencillo ejemplo, supóngase que alguien pone en duda el aserto de que podemos derivar G.4 de H.I y G.6, y no se da por satisfecho cuando se le indica que esto es obvio. Podemos proceder como sigue: en primer lugar adoptamos las siguientes abreviaturas. Utilizamos *'Mx'* por 'x es muscular', *'Ax'* por 'x está en acción', *'Hx'* por 'x se endurece' y *'HTx'* por 'x es un corazón'. Utilizamos asimismo el símbolo 'si . . . , entonces . . .', ya explicado. De esta forma nuestras premisas son:

[H. I] $(x)\,(HTx \supset Mx)$,

[G.6] $(x)\,((Mx \text{ y } Ax) \supset Hx)$,

y el enunciado a derivar de ellas es

[G.4] $(x)\,((HTx \text{ y } Ax) \supset Hx)$.

Comenzamos por remover los cuantificadores. Si S es un enunciado cualquiera, y puesto que estamos suponiendo que H.I es verdadera, tenemos por fuerza

(i) $(S \text{ o no } (S)) \supset (x)\,(HTx \supset Mx)$,

y partiendo de aquí, mediante el uso de la regla I, obtenemos

(ii) $(S \text{ o no } (S)) \supset (HTx \supset Mx)$;

pero como $(S \text{ o no } (S))$ es una tautología, podemos, partiendo de (ii) y con ayuda de la regla de abrupción, obtener

(iii) $(HTx \supset Mx)$;

por un procedimiento exactamente análogo, y partiendo de G.6, obtenemos

(iv) $((Mx \text{ y } Ax) \supset Hx)$;

sustituyendo *'A'* por *'Mx'*, *'B'* por *'Ax'* y *'C'* por *'Hx'* en el principio (3) de la página 29, obtenemos

(v) $((Mx \text{ y } Ax) \supset Hx) \supset (Mx \supset (Ax \supset Hx))$,

pero de (iv) y (v) podemos, con la ayuda de la regla de abrupción, derivar

(vi) $(Mx \supset (Ax \supset Hx))$,

por otra parte, sustituyendo *'A'* por *'HTx'*, *'B'* por *'Mx'* y *'C'* por '$(Ax \supset Hx)$' en el principio (6) de la página 29, obtenemos

(vii) $((HTx \supset Mx) \text{ y } (Mx \supset (Ax \supset Hx)) \supset (HTx \supset (Ax \supset Hx)))$;

de (iii) y (vi), por la regla de adjunción, resulta

(viii) $(HTx \supset Mx) \text{ y } (Mx \supset (Ax \supset Hx))$;

de (vii) y (viii), por abrupción, derivamos

(ix) $(HTx \supset (Ax \supset Hx))$;

sustituyendo *'A'* por *'HTx'*, *'B'* por *'Ax'* y *'C'* por *'Hx'* en el principio (4) de la página 29, obtenemos

(x) $(HTx \supset (Ax \supset Hx)) \supset ((HTx \text{ y } Ax) \supset Hx)$;

y de (ix) y (x), por abrupción, obtenemos finalmente

(xi) $((HTx \text{ y } Ax) \supset Hx)$.

Ahora sólo queda reintroducir el cuantificador '(x)'. Supongamos que S sea cualquier enunciado en el que la variable *'x'* no esté libre. Entonces, puesto que tenemos (xi), hemos de tener

$$(S \text{ o no } (S)) \supset ((HTx \text{ y } Ax) \supset Hx),$$

y partiendo de aquí, con ayuda de la regla II, podemos derivar

(xii) $(S \text{ o no } (S)) \supset (x)\ ((HTx \text{ y } Ax) \supset Hx)$,

y de (xii) y la regla de abrupción, obtenemos el enunciado deseado

(xiii) $(x)\ ((HTx \text{ y } Ax) \supset Hx)$.

Al aducir este ejemplo he escrito cada paso explícita y detalladamente. Con un poco de práctica es posible efectuar directamente las transformaciones requeridas sin necesidad de hacer primero las correspondientes sustituciones en las fórmulas que se dieron en la página 29, supuesto que nuestros enunciados estén construidos de suerte que exhiban su forma. En modo alguno se invita con ello a realizar un cálculo complicado en situaciones donde basta la intuición. De más

general importancia es la utilización de un lenguaje simplificado y controlable del tipo que estoy sugiriendo, que exhibe la forma de los enunciados, ayudando así a la intuición y prestándose al uso del cálculo cuando ello sea necesario.

La característica más importante del proceso de derivar consecuencias a partir de enunciados tal y como lo ilustra este ejemplo, es el hecho de que sólo requiere que se preste atención al aspecto *estructural* o sintáctico de los enunciados, *no al significado de ellos.* Al obtener G.4 de H.I y G.6, el hecho de que estos enunciados hablen de corazones y músculos es enteramente irrelevante desde el punto de vista de la validez del proceso de derivación. Este proceso depende, en especial, de lo que anteriormente se llamó signos *formativos*, que proporcionan, por así decirlo, el esqueleto estructural de los enunciados. De los signos descriptivos depende únicamente en la medida en que tales signos son de distintos tipos y se encuentran distribuidos de un modo particular. Pero en modo alguno depende de cualquiera de los significados que les podamos atribuir.

Si analizamos la totalidad de la teoría de Harvey del modo que he descrito, observaremos que es sumamente complicada y que contiene enunciados (aparte de los metodológicos) que no son ni generalizaciones de los registros de observación, ni hipótesis explicativas, sino *consecuencias* de estas últimas. Tales enunciados no pertenecen al sistema de niveles de hipótesis. Entre ellos figura la tesis de que la sangre circula del lado derecho del corazón, a través de los pulmones, al lado izquierdo, retornando del lado izquierdo del corazón a través de las arterias y venas, al lado derecho.*

Podemos decir, pues, que una teoría científica consiste en un conjunto de hipótesis de máximo nivel, en unión de todas sus consecuencias. De acuerdo con ello, si sabemos cuáles son las hipótesis de máximo nivel en una teoría, poseemos ya la totalidad de ella en una forma extremadamente compacta. Si conocemos además las reglas metateoréticas para derivar consecuencias, podemos obtener estas últimas de un modo mecánico.

Es de advertir que no hay protocolos de observación en una teoría. Ello es porque tales enunciados no se siguen sin más de enunciados generales. De la hipótesis 'Todas las ratas tienen dos padres', yo no puedo derivar el enunciado '*a* tiene dos padres' a menos de poseer también el enunciado '*a* es una rata'.

Las teorías científicas no son, usualmente, expuestas en la forma piramidal antes mencionada, con las hipótesis de máximo nivel en la cumbre y sus consecuencias en sucesivas capas en sentido descendente. Construirlas de tal forma requiere, de ordinario, un buen acopio de análisis preliminar. Este proceso es denominado *axiomatización*, y tiene dos aspectos. Primero, la ordenación de los enunciados de la teoría de acuerdo con sus relaciones de consecuencia, tal como ya se ha dicho. Y segundo otro proceso que no ha sido mencionado aún, el cual es a saber, la ordenación de los funtores de la teoría de acuerdo con sus relaciones de definibilidad. El ideal es elegir un reducido número de nociones claras y básicas, explicarlas en el metalenguaje y con su ayuda construir definiciones de todos los demás funtores que se utilicen en el sistema. De este modo resulta a menudo posible reemplazar oscuras y ambiguas nociones del lenguaje cotidiano por otras que son claras y no ambiguas.

---

* Véase Apéndice A.

Este proceso puede ser ilustrado por referencia a las cinco operaciones sobre enunciados. Es fácil mostrar, por medio de las tablas de verdad, que '*A* si y sólo si *B*' es analíticamente equivalente a la conjunción de 'si *A*, entonces *B*' y 'si *B*, entonces *A*'. Por esto es por lo que recibe el nombre de *bi*condicional. De este hecho podemos hacer uso en orden a *definir* '. . . si y sólo si . . .', eliminándolo en favor de '*y*' y 'si . . . , entonces . . .'. Lo que podemos hacer en nuestro metalenguaje escribiendo: '*A* si y sólo si *B*' es una abreviatura de '(si *A*, entonces *B*) y (si *B*, entonces *A*)'. Pero esto no constituye una definición aislada, sino un *esquema de definición,* con ayuda del cual, sustituyendo adecuadamente '*A*' y '*B*' por enunciados, podemos obtener cualquier abreviatura particular de esa índole que el caso exija. Ello revela que es posible, en principio, prescindir de '. . . si y sólo si . . .'.

Ya hemos visto que '(no *A*) o *B*' es analíticamente equivalente a 'si *A*, entonces *B*', de suerte que podemos hacer uso de este hecho para eliminar 'si . . . , entonces . . .' de análoga manera. Pero '*y*' puede ser asimismo eliminada en favor de 'no' y 'o', ya que puede mostrarse que '*A* y *B*' es analíticamente equivalente a 'no ((no *A*)) o (no *B*))'. De este modo, las cinco operaciones pueden ser reducidas a dos. Finalmente, es posible aún reducirlas a una, dado que existe una combinación de verdad denominada *negación conjunta*: 'ni *A* ni *B*', que es verdadera solamente en el caso de que tanto '*A*' como '*B*' sean falsas; por medio de esta función es posible definir 'o' y 'no'.

Este proceso de reducción gradual del número de operaciones primitivas sobre enunciados puede ser aplicado asimismo a los funtores, hasta llegar a un vocabulario mínimo de funtores primitivos para una teoría. Cuando afirmé, en la primera conferencia, que los requisitos del lenguaje científico resultan ser sorprendentemente reducidos, tenía presente el hecho de que con una elección adecuada de funtores primitivos es posible construir muchos otros mediante definición. Ejemplos de esto y de los métodos y tipos de definición se darán más tarde en la Parte II.

Poco he dicho hasta el momento acerca del aspecto semántico de los enunciados teoréticos. Ello plantea el celebrado y difícil problema de la inducción. Tradicionalmente, el paso de registros de observación a enunciados teoréticos es llamado *inducción*, y el paso de uno o más enunciados teoréticos a sus consecuencias es llamado *deducción*. La razón por la cual he evitado hasta ahora estas palabras es porque frecuentemente se las usa, en la actual literatura biológica, ¡como si fueran sinónimas! Así resulta posible encontrar la palabra 'deducción' designando *ambos* procesos en una y la misma página de un libro de biología. La palabra 'inducción', en cambio, es raramente usada en tales lugares. Lo mismo sucede en las historias de detectives, donde el inspector habla siempre de sus deducciones, para significar su reconstrucción imaginativa del crimen, que es una hipótesis explicativa de los indicios. Ello se debe a una falta de distinción entre ambos procesos, y esto, a su vez, al hecho de que ambos son, de ordinario, realizados intuitivamente. Por lo demás, palabras tales como 'prueba', 'conclusión', 'inferencia', 'consecuencia', etc., son frecuentemente usadas de forma indiscriminada en ambas conexiones, aun cuando sea muy distinto el significado en cada una.

El paso de los registros de observación a sus correspondientes generalizaciones, parece, en amplia medida, darse automáticamente, sin esfuerzo consciente alguno. A veces, empero, advertimos un vislumbre del mismo en los escritos de los biólogos. Considérese, por ejemplo, el siguiente pasaje de Spemann, en el que se habla acerca del proceso de formación de lente en miembros de la especie *Rana fusca*. En este pasaje indica su autor que

> la formación de la lente y la transformación de la negra epidermis en blanca córnea no tiene lugar si se ha seccionado el rudimento de ojo de su soporte nervioso. . . . Parecía natural extender este resultado e incluir a todo vertebrado. Mas pronto se conocieron casos de formación de lente en completa ausencia del globo ocular. . . . Seguro como estaba de mi caso con la *Rana fusca*, y predispuesto de antemano por la idea de que formas animales semejantes han de comportarse de modo semejante, me resistí al principio a abandonar mi convicción. . . . No obstante, repetí mi experimento sobre otro objeto, la *R. esculenta*, y entonces resultó, para mi gran sorpresa, que, después de seccionar totalmente el ojo rudimentario del soporte nervioso, se podían originar lentes de gran perfección.*

Aquí tenemos, pues, el proceso de inducción en acción. Primero se da el salto inconsciente (que no es, por tanto, mencionado) de un número finito de observaciones sobre miembros de la especie *Rana fusca* a *todos* los miembros de esa especie. Luego viene el enorme salto consciente, que 'parecía natural', a *todos los vertebrados*.

Finalmente surge la gran retirada de esta posición ante el descubrimiento de una instancia contraria *dentro incluso del mismo genus* de anfibios anurados, retirada que se adoptó con reluctancia debido a la creencia de que 'formas animales semejantes han de comportarse de modo semejante'. La tendencia parece ser, por tanto, a generalizar con la máxima extensión e introducir restricciones en nuestras generalizaciones sólo en la medida en que así lo requieran nuevas observaciones. Y este parece ser el único procedimiento que tenemos a mano, el cual, a juzgar asimismo por las apariencias, es lo bastante inocuo, mientras no lo confundamos con la deducción y mientras estemos en todo momento preparados a emprender la retirada cuando la observación lo requiera. Una hipótesis verdadera sería una hipótesis que *nunca* ha sido falsificada; mas comoquiera que no podemos saber *cuál* de nuestras actuales hipótesis será alguna vez falsificada, no sabemos tampoco cuál de ellas es verdadera. Es mejor, por tanto, dividir las hipótesis en bien confirmadas, confirmadas, no contrastadas y falsificadas, más bien que dividirlas en verdaderas y falsas.† Debiera también recordarse que la observación no es el único camino según el cual pueda ser falsificada una hipótesis. En ocasiones acontece que puede mostrarse que una hipótesis es contradicha por otra o por otras dentro de la misma teoría, lo cual reclama entonces el abandono de uno de los enunciados mutuamente contradictorios.

Cabría añadir aquí unas palabras para explicar el mecanismo de la falsificación de hipótesis por registros de observación. Supóngase que tenemos una secuencia

---

* H. Spemann, *Embryonic Development and Induction* (1938), p. 60.

† Véase Nota 11, pp. 51-2.

de hipótesis pertenecientes a una teoría, correspondiendo cada una de ellas a niveles que van de n a cero,

$$H_n, H_{n-1}, \ldots, H_0$$

y siendo tal la secuencia que cada una de esas hipótesis forma con la que le sucede un condicional analítico

$$H_n \supset H_{n-1} \text{ y } H_{n-1} \supset H_{n-2} \text{ y } \ldots \text{ y } H_1 \supset H_0.$$

En ese caso, por el principio del silogismo, podemos eliminar sucesivamente los términos intermedios y llegar así a

$$H_n \supset H_0.$$

De donde, por el principio de transposición, obtenemos

$$(\text{no } H_0) \supset (\text{no } H_n).$$

Ahora bien, si 'H_0' resulta falsificada por la observación, de suerte que tengamos '(no H_0)', podemos obtener de ahí y de la fórmula anterior, por la regla de abrupción, el enunciado:

$$\text{no } H_n.$$

Ello valdrá para todo número finito n, de forma que ninguna hipótesis, por remota que sea la distancia que la separe de los registros de observación, se encuentra más allá del alcance de la falsificación, en el supuesto de que pertenezca a una tal secuencia.

La importancia que tiene el atender a la forma tanto del objeto como del lenguaje en la ciencia natural, ha sido ya mencionada.* Para ilustrar mejor este punto, consideremos el siguiente pasaje de un artículo de A. B. Kempe, titulado *The Subject Matter of Exact Thought,* que apareció en *Nature*, 1890, vol. 43, páginas 156-162:

> Cualquiera que pueda ser la verdadera naturaleza de las cosas, y de las concepciones que tenemos de ellas (puntos éstos que no nos concierne aquí inquirir), en las operaciones del pensamiento exacto se las trata como si formasen un número de entidades separadas.
> Toda entidad es distinta de ciertas entidades y (a menos que sea única) indistinta de otras. De la misma manera, toda colección de entidades es distinta de ciertas colecciones y (a menos que sea única) indistinta de otras; y todo aspecto de una colección de entidades es distinto de ciertos aspectos de colecciones y (a menos que sea único) indistinto de otros.
> Todo sistema de entidades tiene una 'forma' definida, y debida (1) al número de sus componentes y (2) al modo según el cual entidades, colecciones de entidades y aspectos de colecciones de entidades distintas e indistintas se distribuyen a través del sistema.
> Las peculiaridades y propiedades de un sistema de entidades dependen, en lo concerniente a los procesos del pensamiento exacto, de la 'forma' particular que adopta el sistema y son independientes de cualquier otra condición.

---

* Véase Nota 12, pp. 51-2.

En el lenguaje de la moderna teoría de conjuntos,* Kempe entiende que, primero, debemos decidir lo que vamos a considerar como individuos, y de aquí pasar a los conjuntos o clases de tales individuos (sus colecciones), cada uno de ellos compuesto de individuos que son indistintos entre sí, para, finalmente, considerar las relaciones entre dichos conjuntos (por aspectos, Kempe entiende relaciones). Una vez se haya puesto fin a semejante tarea, volvemos a la cuestión de saber cómo se distribuyen estos objetos a través del sistema. En la Parte II se darán ejemplos del uso de este procedimiento en genética.

Algo más hay que decir también para explicar los términos de Kempe 'distinto' e 'indistinto'. Las palabras 'idéntico', 'igual', 'semejante', 'similar', 'indistinto' y sus opuestos se utilizan en un número de sentidos que son harto diferentes y no deben ser confundidos. En primer lugar está la identidad estricta o absoluta, que ha sido ya mencionada y para la cual se usa, de ordinario, el signo '='. Este uso de 'identidad' es mucho más común en conceptos matemáticos que en cualesquiera otros, pero en modo alguno se confina a la matemática. Usualmente, cuando decimos en lenguaje ordinario que un objeto a es idéntico a un objeto b, no entendemos que sean uno y el mismo objeto, sino que son *idénticos en ciertos respectos*; son estos respectos y no los objetos mismos, los que son idénticos en sentido estricto. Pues cuando decimos que a y b son gemelos idénticos, no significamos que $a = b$, sino que son idénticos en *más* respectos de lo que es comúnmente el caso con gemelos ordinarios.

Otro sentido de 'identidad' o 'mismidad' va envuelto, sin embargo, cuando decimos que el profesor García ha repetido un cierto experimento sobre *el mismo* animal. Más tarde se dará la explicación de este uso.

Se dice que dos conjuntos son idénticos cuando todo miembro del uno es también un miembro del otro, y todo miembro del otro lo es asimismo del uno. Esto puede ser también definido como inclusión mutua, puesto que un conjunto está incluido en otro si todo miembro del primero es un miembro del segundo. De este modo podemos definir la identidad de conjuntos en el plano individual, utilizando un cuantificador universal así:

$$A = B \text{ si y sólo si, para todo } x,\ x \in A \text{ si y sólo si } x \in B,$$

o puramente a nivel de conjuntos, utilizando la relación de inclusión ($\subset$):

$$A = B \text{ si y sólo si } A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Posteriormente utilizaremos un signo diferente, a saber '$\subseteq$', que se define como sigue:

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } A \subset B \text{ o } A = B;$$

dicho en otras palabras, este signo significa 'inclusión que no excluye identidad'.

Volviendo al 'indistinguible' de A. B. Kempe, resulta claro del contexto que este autor se refiere a la identidad en ciertos respectos, en especial los respectos que son característicos de la teoría particular que nos interesa. Ahora bien, un respecto es un conjunto de alternativas que se excluyen entre sí —tales como medidas de un cierto tipo; así por ejemplo, pesos alternativos, alturas alternativas, etc. Podemos usar la forma funcional '$R(x)$' para denotar cuál en particular

* Véase Nota 13, pp. 53-4.

de estas alternativas de un respecto dado R es ostentada por un objeto individual cuyo nombre se sitúa en sustitución de *'x'*, la variable independiente. Así por ejemplo, si nos estamos ocupando del peso y *'a'* es el nombre de un objeto individual, entonces '$W(a)$' denotaría el peso de a. Ahora bien, esta noción se deriva de una relación de dos términos que se da entre dos objetos cuando éstos se equilibran mutuamente en una máquina de pesar. Utilicemos *'B'* para dicha relación, de forma que *'xBy'* es un modo abreviado de decir que x e y se equilibran el uno al otro. Pero en ese caso es claro que se trata de lo que se denomina una relación *simétrica*, es decir, para todo x y para todo y,

si xBy, entonces yBx.

La aludida relación es asimismo *transitiva*, es decir, para todo x, para todo y, y para todo z

si xBy e yBz, entonces xBz.

Pero las relaciones que son simétricas y transitivas generan lo que recibe el nombre de clases o conjuntos equivalentes. Supóngase, por ejemplo, que a es un objeto físico y W es el conjunto de todos los objetos que están en esa relación B con a; en ese caso cualesquiera dos miembros de W tendrán el mismo peso, y ningún objeto que difiera en peso de cualquier miembro de W puede ser un miembro de W. W es así uno de los muchos conjuntos o clases equivalentes, mutuamente exclusivos generados por la relación B. Con cada uno de tales conjuntos irá asociado un número perteneciente a una escala de pesos. Por la frase 'el peso de x' podemos significar la clase equivalente a la que pertenece x, como también el número de una escala que se asocia con todo miembro de esa clase; en este último caso diríamos 'el peso de x en gramos', o en cualquier otra escala que se adoptase. Estas clases equivalentes son instancias singularmente importantes de las 'colecciones de entidades indistintas entre sí' de que habla A. B. Kempe en el pasaje más arriba citado. En la Parte II investigaremos las clases equivalentes que son importantes en genética.

La noción de identidad, o su opuesto, la diversidad, juega un papel de importancia en la formación de las hipótesis explicativas. Unas cuantas observaciones de carácter general sobre este punto deben indicarse aquí, por tanto, aunque más tarde se ilustren con mayor detalle. Cuando dos objetos difieren en algún respecto, normalmente procedemos sin más a establecer la hipótesis de que esos objetos tienen, cuando menos, un par de *partes* correspondientes que difieren en algunos respectos. Habiendo decidido cuáles son las partes envueltas, aplicamos entonces el mismo procedimiento a las partes de *éstas*, y así sucesivamente. De este modo, la ciencia natural se torna en una persecución de partículas. Si, en un cierto estadio, se alcanzan partes más allá de las cuales no es posible continuar, tales partículas reciben a veces el nombre de partículas *últimas*. Mas, como ha mostrado la historia de la física, las partículas últimas de una década pueden convertirse en las partículas penúltimas de la siguiente. Antes se indicó que es imposible saber que una hipótesis explicativa es verdadera por el hecho de que haya tenido éxito. Y ello es así porque de $A \supset B$ y B no podemos inferir A. Por esta razón, las hipótesis explicativas alcanzadas en la búsqueda de la diversidad deberían ser

cuidadosamente estudiadas desde el punto de vista de la adecuación de sus pruebas y a cada paso, de uno al siguiente par de partes diversas.

La diversidad puede ser también buscada retrocediendo en el tiempo. Cuando observamos que dos objetos difieren en algún respecto, pasamos sin más a la hipótesis de que un par de sus predecesores temporales difieren también en algún respecto. Ello conduce a la suposición de una persistencia de la diversidad en sentido retrospectivo.

Concluiremos esta conferencia con una breve exposición de un principio metodológico de gran importancia que merece ser mejor conocido. En 1926 se publicó un libro de A. N. Whitehead, matemático y filósofo, que llevaba por título *Science and the Modern World*. Este libro contenía numerosas observaciones metodológicas de valor, así como también muchas cosas que resultaban oscuras incluso a filósofos instruidos. Una observación que parece particularmente digna de atención es la siguiente:

> El pensamiento es abstracto, y el uso intolerante de abstracciones es el vicio mayor del intelecto.

Infortunadamente, el autor no nos informa sobre su punto de vista, aduciendo ejemplos que lo ilustren. ¿Qué entiende por 'abstracciones'? En el curso de un buen número de años de estudio del procedimiento científico, han venido a mi conocimiento instancias que gradualmente he aprendido a reconocer como ejemplos de aquello contra lo cual nos avisaba Whitehead. Tal vez el modo más breve de expresar su intención es el siguiente. Podemos decir que la abstracción (en un sentido de la palabra) tiene lugar cuando una relación funcional de n variables independientes es interpretada como una relación funcional de *menos de n* variables independientes. Esto queda bien ilustrado por la historia del termómetro de mercurio. Cuando decimos que el punto de ebullición del agua es 100°C, estamos tratando una relación funcional de dos variables independientes como si tuviera sólo una; puesto que estamos abstrayendo de la presión atmosférica. Cuando el agua entró en ebullición en la cumbre de altas montañas, se advirtió que hervía allí a temperaturas inferiores a 100°C. Cuando la teoría atómica de Dalton fue primeramente propuesta, se supuso que los átomos de todo elemento son indistinguibles entre sí. Ello fue posible porque, por aquel tiempo, no se disponía de pruebas experimentales para distinguir los que ahora se denominan isótopos de los elementos. El procedimiento consiste en dar por supuesta la identidad hasta que las pruebas experimentales revelen diversidad. Ello significa que no es correcto suponer que la última palabra pronunciada es también la definitiva. Desconocemos lo que el futuro nos tiene reservado. ¡Toda hipótesis científica es una prenda de la fortuna!

En las primeras décadas de la presente centuria, se enseñaba que cuanto se necesitaba para la nutrición del hombre eran proteínas, grasas y carbohidratos. Ello era porque las vitaminas estaban aún por descubrir.

Un ejemplo, tomado de la genética, lo proporciona el siguiente enunciado:

> Si podemos diferir unos de otros, ello es o bien porque los genes que hemos recibido de nuestros padres no son los mismos, o bien porque nuestros ambientes han sido distintos —o bien porque ambas causas han actuado conjuntamente.

Esto parece sugerir que si dos huevos difieren, difieren tan sólo por relación a sus genes, no a su citoplasma. Incluso se ha dicho que 'el citoplasma no desempeña papel alguno en la herencia'. Aquí los genes son las abstracciones, y el citoplasma aquello *de* lo cual se abstrae. De dos variables independientes en una relación funcional, se subraya la una a expensas de la otra. La siguiente cita de un especialista en genética lleva consigo más graves consecuencias:

> Es bien sabido que la introducción de una asamblea de genes organizada bajo la forma de una cabra en una isla oceánica, puede cambiar completamente su flora, su fauna y su fisiografía.

Es este un enunciado harto sorprendente para ser encontrado en un libro de ciencia, ya que al hablar a un nivel teórico relativamente alto acerca de algo que puede ser perfectamente bien establecido a nivel de observación, cuanto en él se afirma puede ser extremadamente equívoco al abstraer sin necesidad de tan grande porción de contenido. Lo que en dicho enunciado se significa parece ser lo que sigue:

> Es bien sabido que si se llevan cabras a pastar en una isla oceánica, la flora, la fauna y la fisiografía de la isla pueden ser completamente cambiadas.

Nada parece haberse ganado aquí al hablar de genes, puesto que una cabra no es una asamblea organizada de genes en el sentido en que un cristal de nieve es una asamblea organizada de moléculas de agua. Los genes son partes de los cromosomas, pero los cromosomas tienen partes que no son genes ni partes de genes, y los cromosomas son partes de los núcleos celulares, pero los núcleos celulares tienen partes que no son cromosomas ni partes de los cromosomas; por añadidura, los núcleos celulares son partes de las células, pero las células tienen partes que no son núcleos ni partes de núcleos; a su vez, las células forman parte de los tejidos, pero los tejidos tienen partes que no son células ni partes de células; finalmente, los tejidos de varios tipos forman órganos, y los órganos de varios tipos, con variedad de relaciones entre sí, forman sistemas de órganos, ciertos de los cuales, en sus mutuas relaciones específicas constituyen cabras. Las cabras son, por tanto, cosas muy complicadas, mas al hablar de ellas como asambleas organizadas de genes, abstraemos por completo de toda esa complicación.

La genética abunda en ejemplos de este tipo de abstracción. Otro lo proporciona la historia de los llamados cromosomas sexuales. Cuando los cromosomas X e Y fueron primeramente descubiertos, se advirtió que en muchos animales la presencia de un cromosoma X en las células estaba asociada con un sexo, y la presencia de dos X con el sexo contrario; por esta razón se dijo que esos cromosomas determinan el sexo, y se los denominó cromosomas sexuales. Pero más tarde se observó que los restantes cromosomas –los autosomas– estaban envueltos también, y por consiguiente se había abstraído de ellos; un caso extremo de relación funcional con múltiples variables independientes que es tratada como si tuviera sólo una o dos. Porque ulteriormente se demostró que la desviación de las proporciones normales de los cromosomas sexuales con respecto a los autosomas producía estados anormales –denominados intersexos.

Acabamos de considerar una serie de ejemplos del proceso de abstracción. Lo que hay de característico en todos ellos es que algo se ha *destacado* a expensas de algo cuya mención se omite. Lo omitido en algunos ejemplos, fue omitido por la muy justificable razón de que aún no había sido conocido o reconocido (p. e. la presión atmosférica en los primeros días del termómetro de mercurio, los isótopos en el tiempo de Dalton, las vitaminas en las primeras décadas del presente siglo). En otros casos, lo omitido es algo conocido en el presente, pero cuya presencia no se considera importante para el resultado. Del objeto que se ha puesto de relieve se dice usualmente que ha sido abstraí*do*, y se lo denomina una abstracc*ión*. El objeto *del* cual se ha abstraído es frecuentemente ignorado por completo y olvidado por considerársele carente de importancia.

Es, empero, evidente que el proceso de abstracción es perfectamente inocuo, mientras se tenga conciencia de él. De hecho, si la abstracción no fuese posible, tampoco lo sería la ciencia natural. Eso no es aquello contra lo cual protestaba Whitehead. Lo que es sumamente peligroso es la tendencia a tratar lo que ha sido abstraído como si *no* fuese abstracto, sino concreto e independiente; y tal es lo que sucede cuando dejamos a un lado aquello de lo cual se ha abstraído, sin tener conocimiento ni conciencia de lo que se hace. Esto es lo que Whitehead entiende por uso intolerante de abstracciones; y a esto es a lo que se refiere cuando dice, en un pasaje ulterior:

> En la medida en que las cosas excluidas son importantes en vuestra experiencia, vuestros modos de pensamiento no son adecuados para tratarlas.

Tres lecciones principales pueden aprenderse de los casos de abstracción: la primera ha sido ya mencionada —el hecho de que no podemos suponer correctamente que la *última* palabra pronunciada sobre el tópico sea también la *definitiva*; nunca *sabemos* cuándo hemos alcanzado la palabra definitiva; la segunda lección es que es un error suponer que, puesto que algo puede ser ignorado en *un* contexto, puede ser ignorado en *todo* contexto y, en consecuencia, arrojado por la borda sin más. En tercer lugar es aconsejable recordar que si se ha abstraído de algo, no se está en posición favorable para dogmatizar sobre ello o dar consejo sobre el particular a los que *no* han llevado a cabo semejante abstracción. Pero especialmente importante es tener en cuenta la abstracción cuando se aplica una teoría o una rama de la ciencia a otra. Porque aquello de lo cual se ha abstraído en una ciencia puede ser muy importante en la otra, aun cuando al tiempo en que se proponga la tal aplicación, su importancia puede no haber sido descubierta. Al comparar dos ramas de la ciencia es de la mayor importancia indagar qué tipo de abstracción caracteriza a cada una.

En conclusión, cabe añadir unas breves palabras a lo que se ha dicho sobre la abstracción desde el punto de vista de las relaciones funcionales. Supóngase que se tiene una función de dos variables independientes y una variable dependiente que puede expresarse así:

$$f(x, y) = z.$$

Supóngase además que, bajo las circunstancias en que usualmente se encuentra esta

relación funcional, el valor de x es siempre un cierto objeto constante a, de modo que se tiene

$$f(a, y) = z.$$

En tal caso, si no se tuviera conciencia de la existencia de a, se consideraría esta función como si fuese de *una* variable independiente, y se escribiría

$$f(y) = z.$$

Pero supóngase que un día se observase una instancia de la función en la cual la variable x tuviese el valor b, de modo que

$$f(b, y) = z,$$

y para algún valor, por ejemplo c, de y se tuviese

$$f(b, c) \neq f(a, c),$$

en cuyo caso no habría más remedio que reconocer que se trataba de una función de dos variables independientes.

NOTAS A LA PARTE I

Nota 1 (p. 15). George Boole nació el 2 de noviembre de 1815 en Lincoln. Se educó en la localidad. Abrió una escuela propia a la edad de 20 años. En matemática fue, en gran medida, autodidacta. En 1849 fue nombrado profesor de matemática en el Queen's College, Cork. Se le concedió la medalla de la Royal Society en 1844 por su trabajo matemático. Se casó con Miss Everest en 1855. Se le otorgó la medalla Keith de la Royal Society de Edimburgo en 1857. Su primera obra lógica, *The Mathematical Analysis of Logic*, se publicó en 1847 (reimpresa en 1947) y su principal obra, *An Investigation of the Laws of Thought*, en 1854. Murió el 8 de diciembre de 1864.

Gottlob Frege nació en 1848 y murió en 1925. Fue profesor de matemática en la universidad de Jena desde 1879 hasta 1918. Su *Begriffsschrift* se publicó en 1879, su *Grundlagen der Arithmetik* en 1884 y su *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, en 1893 y vol. II en 1903.

Nota 2 (p. 16). Como ha dicho el profesor R. A. Fisher:

> Toda mente activa se ve obligada a formar opiniones sin evidencia directa, pues si no, demasiado a menudo, la evidencia no podría ser alcanzada. La imparcialidad y la disciplina científica se producen al someter las opiniones establecidas a una evidencia tan relevante como pueda alcanzarse. (*The Genetical Theory of Natural Selection*, 1930, p. 3).

Las creencias erróneas con relación al descubrimiento, referidas en el texto, están conectadas con el cliché, usado muy a menudo por escritores populares y por divulgadores de la historia de la ciencia, que asegura que la 'Ciencia se basa en la observación y el experimento'. Esto es lo mismo que decir que la salud se basa en la buena digestión. Desde luego, la ciencia se basa en la observación y el experimento, pero *no sólo* en la observación y el experimento. Obviamente, si usted cree que ella se basa sólo en la observación y el experimento, entonces cualquier cosa nueva que se introduzca en la ciencia *debe* ser un descubrimiento. En vista de la popularidad de la ciencia en estos días es deplorable que sea tan poco comprendida, aun por aquellos que están activamente comprometidos con ella. Ya es tiempo de que sean más ampliamente reconocidos y entendidos los papeles jugados en ciencia por la imaginación, la invención y la creencia —en adición a la observación y al experimento. La ignorancia en tales materias engendra dogmatismo e intolerancia, que vienen a ser la enfermedad del científico.

Nota 3 (p. 17). Ocasionalmente encontramos, en la literatura corriente, exhortaciones a prestar cierta atención a la metodología. Así Dr. F. M. R. Walshe en su Harveian Oration, contenida en *The Lancet*, 23 de octubre de 1948, p. 661, dijo:

Además, yo pregunto cómo puede enseñarse dignamente la medicina en su vertiente académica si no es por mentes bien versadas en las artes liberales... que entiendan los principios sobre los que está ordenado el conocimiento y que sean capaces de exponer y de mostrar en la práctica los métodos de razonamiento envueltos.

También en la p. 18 del Medical Curriculum Committee de la British Medical Association, titulado *The Training of a Doctor* (1948), encontramos el ilustrativo enunciado siguiente:

El propósito fundamental del curso en ciencias básicas es enseñar el método científico e inculcar hábitos para pensar de forma clara y lógica. La perspectiva científica debería ser enseñada de modo bien deliberado; no puede ser adquirida como un subproducto de la instrucción fáctica. Lleva consigo el entrenamiento del estudiante en la importancia de la observación sin prejuicios y del experimento controlado, en la evaluación de la evidencia y en el papel de las técnicas y en sus limitaciones. El estudiante debería estar disciplinado también en *el uso propio y en el significado de las palabras y en la relación de nombres y palabras con ideas y cosas.* Al final del curso anual habría adquirido una mente con aptitud científica y habría absorbido en esa aptitud el espíritu de la indagación y observación imparciales. Entonces no contemplará más a las ciencias básicas como colecciones de hechos y leyes, sino como un cuerpo de conocimiento en constante crecimiento, con potenciales aplicaciones médicas de extrema importancia.

Hasta que los propios profesores se hayan educado en metodología y pierdan su vigencia las presentes creencias erróneas sobre tales materias, será imposible poner en práctica las anteriores sugerencias. En la actualidad, nadie recibe instrucción en 'el uso propio y significado de las palabras y en la relación de nombres y palabras con ideas y cosas', y hasta que los resultados del movimiento de Boole-Frege sean más ampliamente conocidos, tal instrucción no será posible. Las palabras que acabo de citar no están subrayadas en el original.

Una razón por la que se presta tan poca atención a la metodología es porque nuestro uso del lenguaje, en gran medida, es automático, como la respiración. Pero mientras que cuando algo va mal en nuestra respiración nosotros lo advertimos usualmente por el dolor, no hay nada que se pudiera parecer a ello cuando algo va mal en nuestro uso del lenguaje, excepto cuando cometemos alguna infracción grave de la gramática. Pero tales errores son raros. Los defectos del lenguaje que son importantes en ciencia son los más sutiles, y es difícil detectarlos y trazar su origen.

Nota 4 (p. 17). Al decir que los pensamientos sólo pueden alcanzarse efectivamente por el uso del lenguaje no estoy tomando partido sobre la cuestión de la telepatía. Lo único que estoy suponiendo es que aun el más ardoroso creyente en la telepatía estaría de acuerdo en que esta última no nos permite por el momento prescindir por completo del lenguaje.

Nota 5 (p. 19). Está claro que palabras como 'física', 'química', 'biología', etcétera, son palabras metateoréticas, y así resulta que los adjetivos correspondientes 'físico', 'químico', etc., tienen todos un doble uso: uno en el lenguaje objeto y otro en el correspondiente metalenguaje. Así, en la frase 'ecuación química' el adjetivo pertenece al metalenguaje, pero en 'proceso químico' pertenece al lenguaje objeto. Esto ilustra una ambigüedad menor que se entiende fácilmente cuando se indica la distinción entre lenguaje objeto y metalenguaje.

Nota 6 (p. 21). Debe añadirse algo acerca del uso de las palabras 'individuo' y 'nombres individuales'. Lord Russell descubrió que podían surgir ciertas contradicciones en la teoría de conjuntos o clases si no se tomaban precauciones. Su teoría de los tipos está trazada como una formulación de estas precauciones. Se llaman individuos a los objetos que pueden ser miembros de conjuntos, pero que ellos mismos no son conjuntos. Se dice que sus designaciones (nombres individuales) constituyen el tipo inferior. El siguiente tipo superior lo constituyen las designaciones de conjuntos de individuos, y las designaciones de conjuntos de conjuntos de individuos el siguiente, y así sucesivamente. Para una introducción a los problemas con los que tropieza la teoría de los tipos véase: W. V. Quine, *Mathematical Logic,* 1951, p. 128.

Nota 7 (p. 21). Me opongo a la doctrina popular de que la ciencia es o cuantitativa o cualitativa y de que sólo la cuantitativa necesita, o es capaz de, precisión. Rechazo esta antítesis propia de una observación ingenua y proclamo que es posible ser preciso en cualquier rama de la biología si estamos dispuestos a tomarnos la molestia suficiente. El lenguaje de la teoría de conjuntos proporciona el instrumento para lograr esta precisa formulación preliminar. La situación fue comprendida claramente por Leibniz como demuestra el pasaje siguiente:

> El progreso del arte del descubrimiento racional depende en parte del arte de la característica (*ars characteristica*). La razón por la que la gente busca usualmente las demostraciones sólo en números y en líneas y en cosas representadas por éstos no es otra sino que no hay, fuera de los números, caracteres convenientes que correspondan a las nociones. (Leibniz –G. vii, 198– citado por B. A. W. Russell en *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz,* 1900).

El profesor C. I. Lewis, en su *Survey of Symbolic Logic* (1918), hablando del trabajo de los predecesores inmediatos de George Boole, escribe: 'Los anales de la lógica simbólica en el continente son unos anales de fracasos, y en Inglaterra, unos anales de éxitos. Los estudiosos continentales subrayan habitualmente la intensión; los ingleses, la extensión' (p. 37). En p. 52 dice: 'El álgebra de Boole, a diferencia de los sistemas de sus predecesores, se basa estrictamente en las relaciones de extensión'.

Nota 8 (p. 27). Así, se entiende por disyunción la 'o' que *no* excluye 'y'. Es comúnmente mucho más usada la 'o' exclusiva. La interpretación del condicional expuesta aquí de ningún modo coincide con *todos* los usos del 'si . . . entonces . . .' en el habla ordinaria. Están excluidos enunciados tales como 'si Tomás hubiera vivido durante el período Cretáceo, entonces habría visto pterodáctilos', que emplean los modos subjuntivo o condicional.

Nota 9 (p. 32). W. V. Quine, en su *Mathematical Logic* (1940), p. 70, da un ejemplo muy bueno de las extravagancias de la gramática ordinaria en relación con la negación. Considérense los siguientes enunciados generales:

(1) Tomás puede aventajar, a todo miembro del equipo.
(2) Tomás puede aventajar a cualquier miembro del equipo.

Estos son obviamente equivalentes. Ambos pueden escribirse en la forma

$$(x)\ (\text{si } Fx \text{ entonces } Gx).$$

Ahora consideremos los enunciados siguientes que resultan de insertar 'no' en los lugares correspondientes de (1) y (2):

(3) Tomás no puede aventajar a todo miembro del equipo.
(4) Tomás no puede aventajar a cualquier miembro del equipo.

Esperaríamos que (3) y (4) fuesen equivalentes y que ambos fuesen negaciones de (1) y (2). Pero no es así. (3) puede escribirse:

Hay un miembro del equipo al que Tomás no puede aventajar

que tiene la forma

$$(\exists x)\ (Fx\ \&\ \text{no}\ Gx).$$

Así (3) es la negación de (1). (4) puede escribirse

No hay miembro del equipo al que Tomás pueda aventajar

y tiene la forma

$$\text{no}\ (\exists x)\ (Fx\ \&\ Gx),$$

de la que, eliminando el cuantificador existencial, podemos obtener

$$(x)\ (\text{si}\ Fx\ \text{entonces no}\ Gx).$$

Claramente (3) y (4) no son equivalentes y, por lo tanto, (4) no es la negación de (1).

Nota 10 (p. 35). Parece ser una regla que las hipótesis nuevas e importantes sean al principio rechazadas. Leemos, por ejemplo, que la hipótesis de Avogadro no fue 'aceptada por los primitivos proponentes de la teoría atómica' y sólo obtuvo adhesión general 'después de la exposición de la hipótesis, unos 47 años más tarde, por su compatriota el científico italiano Cannizzaro'. También que 'la Ley de Octavas de Newland, 1864, una colocación de los elementos en grupos de ocho que da lugar con cada octavo elemento a una repetición de propiedades al igual que la octava nota de una octava en música, provocó un gran ridículo y escaso respeto, aunque fuese esencialmente la formulación correcta de la periodicidad' (H. S. y H. A. Taylor, *Elementary Physical Chemistry* (1937), pp. 3, 8).

Nota 11 (p. 40). Hay un malentendido muy difundido sobre el *status* de las hipótesis científicas. La práctica corriente parece consistir en llamar a una hipótesis hipótesis sólo cuando se la propone por primera vez. Después de que se haya enfrentado con el mundo por algún tiempo se la llama *teoría*, y cuando ha llegado a estar bien establecida y ha sobrevivido a una copiosa serie de comprobaciones puede finalmente ser llamada un *hecho*. Pero a despecho de todos estos cambios de nombre no ha cesado de ser una hipótesis, esto es, un enunciado que necesariamente va mucho más lejos que los datos accesibles. Estos cambios de nombre registran cambios en nuestra actitud de creencia hacia las hipótesis, no cambios en su propio *status*.

El pasaje siguiente ilustra una actitud muy común:

'Lo mío no son teorías', dijo Eugenius simplemente. 'Son deducciones lógicas a partir de hechos conocidos. Así llegan a ser ellas mismas hechos,

como todas las deducciones y descubrimientos de la ciencia y la filosofía moderna'.

Ahora bien, las teorías *nunca* son, ni pueden ser, 'deducciones lógicas a partir de hechos conocidos' si la frase 'deducciones lógicas' se usa en su sentido estricto y si por hechos se entiende registros de observación. El pasaje anterior no es de un trabajo científico, sino de un libro que indica la extrema debilidad lógica de las especulaciones concernientes a la vida de Shakespeare y que se llama *The Real Shakespeare* (1947) por William Bliss. Pero el autor es incapaz de resistir al impulso de zambullirse en el interior de su misma trampa. De ahí el anterior pasaje. El mismo punto se ilustra por el pasaje siguiente de un artículo que trata de la relación entre genética y citología:

> Cruzando dos formas de *Drosophila melanogaster,* en que los cromosomas X eran visiblemente distinguibles en dos lugares distintos a consecuencia de translocaciones, se obtuvieron individuos que tenían cromosomas X 'doblemente heteromórficos'. Pueden establecerse recombinaciones citológicas de piezas de cromosomas en los casos de cambio entre los factores situados en los cromosomas X. La teoría de Morgan ya no es ahora una teoría, sino un hecho. (Curt Stern, 'Zytologisch-genetische Untersuchungen als Beweise für die Morgansche Theorie, u.s.w.', *Biologisches Zentralblatt,* LI (1931), p. 586).

Los experimentos descritos constituyen una confirmación valiosa de la hipótesis de Morgan, pero no por ello cesa ésta de *ser* una hipótesis.

Las notas siguientes de Lord Russell son útiles en esta conexión:

> El procedimiento actual de la ciencia consiste en una combinación de observación, hipótesis, experimento y teoría. La única diferencia entre una hipótesis y una teoría es subjetiva; el investigador cree la teoría, puesto que piensa que la hipótesis sólo es lo suficientemente plausible cuando ha probado su valor. Una hipótesis concordará con todas las observaciones relevantes conocidas, y con los experimentos sugeridos (u observaciones), que tendrán un resultado si la hipótesis es verdadera, y otro si es falsa. Esto es un ideal; de hecho, en la actualidad, siempre existirán otras hipótesis compatibles con lo que se intenta que sea un *experimentum crucis.* El carácter crucial sólo puede darse entre *dos* hipótesis, no entre una hipótesis y todas las demás. Cuando una hipótesis ha pasado un número suficiente de pruebas experimentales, se convierte en una teoría. El argumento a favor de una teoría es siempre el argumento formalmente inválido: '*p* implica *q*, y *q* es verdadera, por lo tanto *p* es verdadera'. Aquí *p* es la teoría, y *q* los hechos relevantes observados. (*The Analysis of Matter* (1927), p. 194).

Yo no uso la palabra teoría en el sentido anterior. Por teoría entiendo un sistema de enunciados ordenados por la relación de consecuencia. Por lo que respecta al argumento inválido mentado, véase más arriba, p. 29.

J. S. Mill, en su *Logic*, escribió:

> Pero no es, pienso, una razón válida para aceptar cualquier hipótesis dada el que seamos incapaces de imaginar cualquier otra que explicara los hechos. No hay necesidad de suponer que la verdadera explicación deba ser la que, con sólo nuestra experiencia presente, podamos imaginar. (Libro III, Cap. XIV, § 6).

Nada se explica simplemente porque alguien haya sido lo bastante ingenioso para inventar algo que encuentra 'satisfactorio', especialmente si ese algo no es una hipótesis de la cual pueda derivarse un enunciado que describa lo que haya de ser explicado. Para ser una explicación genuina, una hipótesis debe haber sobrevivido a *alguna* prueba.

Nota 12 (p. 41). Los pasajes siguientes son de interés para una ulterior

ilustración de la importancia de la forma o estructura en la teoría científica:

> En realidad, a menos que nos confinemos enteramente al simbolismo matemático, es difícil de evitar el vestir nuestros símbolos con ropajes fraudulentos. Cuando pienso en un electrón aparece en mi mente un balón de estaño, duro, rojo, el protón es similar al gris neutro. Desde luego, el color es absurdo –no más, quizás, que el resto de la concepción– pero yo soy incorregible. Puedo entender bien que las mentes más jóvenes estén encontrando estas imágenes demasiado concretas y estén esforzándose en construir el mundo con funciones y símbolos hamiltonianos tan separados hasta ahora de la preconcepción humana que no obedecen siquiera las leyes de la aritmética ortodoxa. Por mi parte, encuentro alguna dificultad en elevarme a ese plano del pensamiento; pero estoy convencido de que tiene que venir. (Sir A. S. Eddington, *The Nature of the Physical World* (1944)).
>
> Si pedimos del moderno físico una respuesta a la pregunta de qué significa mediante el símbolo 'ψ' de su cálculo, y nos asombramos de que no pueda darnos una respuesta, debemos caer en la cuenta de que la situación era la misma en la física clásica. Allí el físico no podía decir lo que él significaba mediante el símbolo *'E'* en las ecuaciones de Maxwell. Quizás, y por tal de no renunciar a una respuesta, nos diría que *'E'* designa al vector del campo eléctrico... Estamos en nuestro derecho al pedir una interpretación de *'E'*, pero esto se nos dará indirectamente mediante reglas semánticas que se refieran a los signos elementales junto con las fórmulas que los conectan con *'E'*. Esta interpretación nos autoriza a usar las leyes que contienen *'E'* para la derivación de predicciones. Así entendemos *'E'*, si el 'entendimiento' de una expresión, de una sentencia, o de una teoría significa capacidad de usarla para la descripción de hechos conocidos o para la predicción de nuevos hechos. Un 'entendimiento intuitivo' o una traducción directa de *'E'* en términos que se refieran a propiedades observables no es necesaria ni posible. La posición del físico moderno no es esencialmente diferente. ... El posee esa clase de entendimiento que sólo es esencial en los campos del conocimiento y de la ciencia. (R. Carnap, 'Foundations of Logic and Mathematics', *International Encyclopedia of Unified Science,* vol. i, n^{o}. 3).
>
> En la ciencia, la estructura es el estudio principal. (Lord Russell, en *Contemporary British Philosophy*).
>
> Alle wissenschaftlichen Aussagen sind Strukturaussagen.
>
> Jede wissenschaftlichen Aussage grundsätzlich so umgeformt werden kann, dass sie nur noch eine Strukturaussage ist.
>
> Zunächst halten wir fest, dass es für die Wissenschaft möglich und zugleich notwendig ist, sich auf Strukturaussagen zu beschränken. (R. Carnap, *Logische Aufbau der Welt* (1928), pp. 20-1).

Nota 13 (p. 42). Para una introducción sistemática a la lógica matemática y a la teoría de conjuntos se deberían consultar las obras siguientes en el orden dado:

1. Alfred Tarski: *Introduction to Logic and the Methodology of Deductive Science,* 1946.
2. W. V. Quine: *Methods of Logic,* 1950.
3. R. Carnap: *Introduction to Symbolic Logic and its Applications,* 1958.
4. Robert R. Stoll: *Sets, Logic and Axiomatic Theories,* 1961.
5. *Elementary Mathematics of Sets with Applications.* Publicado por el Committee on the Undergraduate Program; Mathematical Association of America. Editado por Robert L. Davis, 1958.
6. Para la teoría de relaciones véase *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, 1925, especialmente el volumen I.
7. Para aplicaciones a la biología véase J. H. Woodger:
   (i) *The Axiomatic Method in Biology,* 1937.

(ii) *The Technique of Theory Construction*; International Encyclopedia of Unified Science, vol. II, n.º 5, 1947.
(iii) *On Biological Transformations,* en *Essays on Growth and Form,* presentado a D'Arcy Wentoworth Thompson, 1945.

APÉNDICE A

UN ANALISIS DE LA OBRA DE HARVEY *DE MOTU CORDIS ET SANGUINIS*

Añado este análisis del *De motu* de Harvey con la esperanza de que pueda interesar a los historiadores de la ciencia y también con el propósito de ilustrar alguno de los puntos discutidos en la Parte I.

He utilizado las traducciones de C. D. Leake* y R. Willis,† pero las formulaciones de los enunciados de Harvey de que se hace uso aquí están tomadas, todas ellas, de la segunda de estas dos traducciones.‡

La exposición sistemática de la teoría de la circulación está contenida en los Capítulos II-XIV. La Introducción se consagra a combatir las opiniones entonces en vigor sobre el corazón y los vasos sanguíneos. El *Capítulo* I expone los motivos que tuvo el autor para escribir la obra, y los tres capítulos que siguen al XIV contienen discusiones misceláneas confirmatorias de la teoría. Leake expresa la opinión de que 'el final del libro parece haber sido escrito algún tiempo después de la parte principal, cuando una larga reflexión sobre el tema había cristalizado sus opiniones'. Lo que sigue se confina casi por entero a la exposición sistemática de los *Capítulos* II-XIV.

Como ya se mencionó en la Parte I, los enunciados de Harvey se pueden clasificar en: (1) enunciados de nivel cero, que se etiquetan aquí con números arábigos; (2) hipótesis de primer nivel, que se etiquetan con números romanos; (3) consecuencias de estas hipótesis, distintas de las indicadas en (1), a las que asigno asimismo números romanos; y (4) enunciados metodológicos, que aquí figurarán entre comillas. Acompaña un diagrama de la circulación de los mamíferos, con indicación de los lugares a que hacen referencia las hipótesis de Harvey

Capítulo II. EL MOVIMIENTO DEL CORAZON

Enunciados de nivel cero

(1) Hay un instante en que el corazón se mueve, y un instante en que permanece inmóvil.

(2) En el intervalo, lo mismo que en la muerte, el corazón está blando y flácido, como si se encontrara en reposo.

(3) Mientras dura su movimiento, el corazón se endereza y se eleva hasta un punto de suerte que en ese instante bate contra el pecho y se siente la pulsación desde fuera.

(4) Mientras dura su movimiento, el corazón se contrae en todas sus partes, pareciendo más estrecho, relativamente más largo y más comprimido.

---

* Publicada en Springfield, Ill, U.S.A. (1928).

† Everyman's Library (1923).

‡ Estas formulaciones se apartan, en ocasiones, de la versión de Willis, tanto por lo que hace al orden de las palabras como en las palabras mismas.

(5) Cuando el corazón se mueve, se siente que se pone más duro.

(6) En los animales de sangre fría, el corazón se torna al moverse más pálido de color, mientras que al quedar en reposo presenta un color rojo sangre más oscuro.

(7) Cuando se coge el antebrazo, se percibe que sus tendones (esto es, los músculos), al moverse los dedos, se tornan tensos y resistentes.

(8) Cuando los músculos entran en acción, se contraen en la línea de sus fibras y adquieren vigor y tensión, y pierden su blandura para tornarse en duros, prominentes y apretados.

Enunciados de primer nivel

I. Todo corazón tiene músculo en sus paredes.

II. El músculo en todo corazón exhibe contracciones y relajaciones que se alternan rítmicamente.

III. Los músculos de todo corazón están dispuestos de forma que, al contraerse, disminuye la capacidad cúbica del corazón.

IV. Al disminuir la capacidad cúbica de un corazón, aumenta la presión en su contenido.

V. Todo corazón de mamífero tiene dos compartimentos a la derecha y dos a la izquierda. La sangre entra en la aurícula derecha por la vena cava, y en la aurícula izquierda por la vena pulmonar. La sangre deja el ventrículo izquierdo por la aorta, y el ventrículo derecho por la arteria pulmonar.

Consecuencias

De I y 8:

VI. Todo corazón se torna duro al contraerse. [En conformidad con (4) y (5)].

VII. Todo corazón se torna blando al relajarse. [En conformidad con (2)].

De I y II:

VIII. El movimiento de todo corazón consiste en la alternación rítmica de contracción y relajación. [En conformidad con (1)].

De III, IV y V:

IX. Si la pared de un corazón es lo suficientemente delgada, aparecerá pálida mientras dura la contracción y del color de la sangre mientras dura la relajación. [Confirmado por (6)].

De III y IV:

X. Si se practica un orificio suficientemente holgado en la pared de un corazón, será expelida sangre por él.

Enunciado de nivel cero

(9) Cuando se perfora el ventrículo de un corazón, se observa que la sangre es proyectada fuertemente hacia fuera a cada movimiento o pulsación, al tensarse el corazón. [Confirmatorio de X].

Capítulo III. EL MOVIMIENTO DE LAS ARTERIAS

Definiciones

[D.1] Se dice que un corazón está en *sístole,* cuando se contrae.

[D.2] Se dice que una arteria está en *diástole,* cuando se dilata y da lugar a una pulsación.

Enunciados de nivel cero

(10) Cuando el corazón está en sístole, las arterias están en diástole.

(11) Cuando se contrae el ventrículo derecho, la arteria pulmonar se distiende al mismo tiempo que las demás arterias del cuerpo.

(12) Cuanto más débil es la contracción del ventrículo izquierdo, más débil es el pulso en las arterias.

(13) Cuando el ventrículo derecho deja de contraerse, cesa también el pulso en la arteria pulmonar.

(14) Si se secciona en los peces el vaso que va del corazón a las branquias, entonces, en el momento en que se contrae el corazón, fluye con fuerza la sangre del vaso dividido.

(15) Cuando, al efectuar la arteriotomía, se proyecta la sangre ora a mayor, ora a menor distancia, advertimos que la mayor propulsión corresponde a la diástole de la arteria y a la sístole del corazón.

(16) Cuando se impide el movimiento de la sangre a través de las arterias, entonces las ramificaciones remotas de éstas laten con menos fuerza.

'De estos hechos resulta manifiesto que'

Enunciado de primer nivel

XI. Las arterias se llenan y distienden por la sangre que les manda la contracción de los ventrículos.

Capítulo IV. LOS MOVIMIENTOS DE LOS VENTRICULOS Y AURICULAS

Enunciados de nivel cero

(17) En un corazón agonizante obsérvase que, primero, se contraen juntamente las aurículas, y ello va seguido de la contracción conjunta de los dos ventrículos; el movimiento parece comenzar en las aurículas y extenderse a los ventrículos, teniendo lugar una breve pausa entre los dos movimientos.

(18) Si permaneciendo aún vivas las aurículas, se seccionan los ventrículos, fluirá la sangre a cada contracción auricular.

Capítulo V.

'A partir de estas y otras observaciones semejantes, estoy persuadido de que se hallará que el movimiento del corazón es como sigue:'

Enunciados de primer nivel

XII. El movimiento de todo corazón es tal que primero se contraen las aurículas y arrojan la sangre (que reciben de las venas) a los ventrículos, los cuales, al llenarse, se contraen y envían la sangre a las arterias.

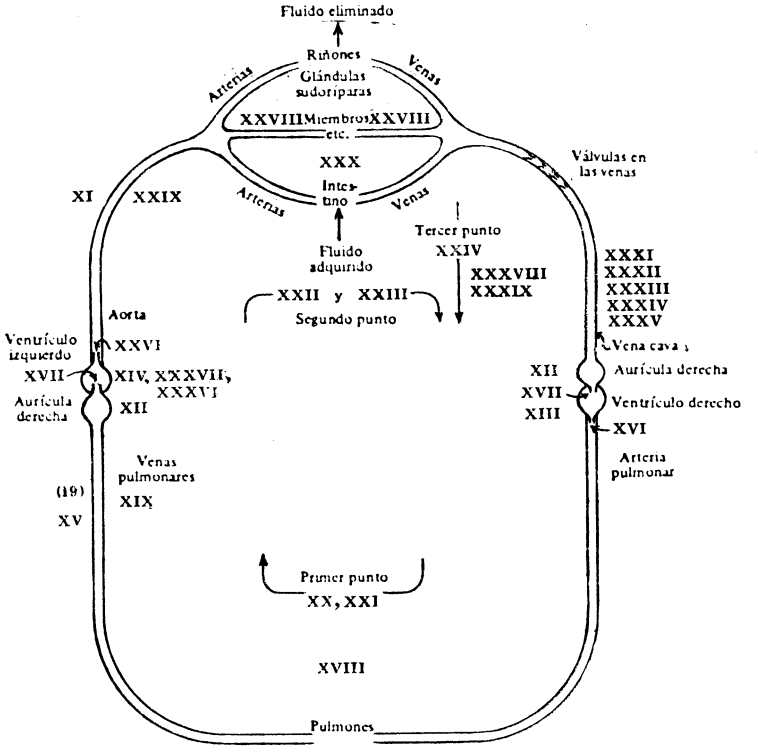
XIII. El ventrículo derecho envía su carga a los pulmones.

XIV. El ventrículo izquierdo envía su carga a la aorta y mediante ella por las arterias a todo lo largo del cuerpo.

A continuación Harvey se encara con el siguiente problema: Si la sangre llega al lado derecho del corazón por medio de la vena cava y sale del izquierdo por la aorta, ¿cómo pasa de uno a otro lado? La respuesta usual en el tiempo de Harvey era que ello tenía lugar por 'exudación a través del septum del corazón'. Harvey rechaza esta teoría y procede a buscar otro camino. En la Introducción anticipa los siguientes enunciados de nivel cero contra el punto de vista contemporáneo entonces:

(i) No se ha demostrado que haya poros en el septum del corazón.

(ii) El septum del corazón es de una estructura más densa y compacta que ninguna otra porción del cuerpo, a excepción de los huesos y tendones.



(iii) Ambos ventrículos se contraen y dilatan simultáneamente.
(iv) El septum del corazón es alimentado con sangre por la arteria y vena coronarias.
(v) En el feto, el foramen oval permite el paso de la sangre de un lado a otro del corazón.

Incidentalmente, (i) no es un punto que convenga a Harvey subrayar, puesto que su propia teoría requiere que pase la sangre a través de los músculos periféricos y otros órganos en los que, por aquel tiempo, no se había demostrado que tuviesen 'poros'.

El *Capítulo* VI comienza con una apología del estudio de la anatomía comparada. Harvey expone aquí su sorprendente conocimiento de este tema. Describe con considerable detalle puntos de los sistemas circulatorios de los peces, anfibios y fetos de los mamíferos. Pero, estrictamente hablando, esto no hace avanzar su argumento. Ni la primera parte del *Capítulo* VII que está dedicada a persuadir a la gente de que él no se está preocupando realmente mucho en sugerir que se considere la posibilidad de que la sangre pase, no a través del septum, sino a través de los pulmones. Tenemos entonces el siguiente enunciado de nivel cero:

(19) Las venas pulmonares y el ventrículo izquierdo siempre contienen sangre.

Y los enunciados siguientes de primer nivel:

XV. Salvo a través de los pulmones no hay otro camino por el que pueda venir la sangre a las venas pulmonares y a la aurícula izquierda.

XVI. Hay tres válvulas semilunares situadas en el orificio de la arteria pulmonar que previenen eficazmente el que la sangre sea enviada a los vasos en su regreso a la cavidad del corazón.

XVII. El corazón está recibiendo y expeliendo sangre continuamente por y desde sus ventrículos y para este fin está provisto de cuatro conjuntos de válvulas, de las que dos sirven para la educción y dos para la inducción de sangre, para que ésta no sea enviada incómodamente de acá para allá y se oprima así el corazón con esfuerzo en vano, e interfiera con el oficio de los pulmones. [Esto es una cita de Galeno].

XVIII. La sangre está pasando continuamente del ventrículo derecho al izquierdo, de la vena cava a la aorta, a través de la estructura porosa de los pulmones.

XIX. La sangre es impulsada incesantemente de los pulmones al ventrículo izquierdo.

Harvey dice ahora: 'Finalmente, nuestra posición es que XVIII aparece claramente a partir de esto: puesto que tenemos XIII (véase más arriba) y XIX, como aparece de lo que precede y de la posición de las válvulas, no puede ser de otro modo que XVIII'.

Esto concluye el pasaje de la sangre del lado derecho del corazón al izquierdo. El resto del libro está dedicado al problema de cómo la sangre pasa del lado izquierdo del corazón al derecho.

El breve *Capítulo* VIII contiene una referencia a la oposición que Harvey anticipa a su teoría y también un cierto anuncio del argumento que se desarrollará en los capítulos siguientes. El cual puede establecerse como sigue:

Una gran cantidad de sangre está siendo impelida a las arterias a través de la aorta, (XIV).

(i) ¿Por qué no estallan las arterias?

Una gran cantidad de sangre está pasando a lo largo de las venas a la vena cava.

(ii) ¿Por qué no se vacían?

Harvey menciona que el fluido entra en el sistema a partir de los jugos suministrados por el alimento, pero rechaza esta explicación como incapaz de impedir (ii). No menciona la pérdida de fluido por las glándulas sudoríparas y los riñones. Presumiblemente lo rechazó como incapaz de impedir (i). Siendo estas posibilidades así excluidas, mantiene que lo único permanente es el continuo pasaje de sangre de las arterias a las venas, dándose así 'un movimiento como si fuera en círculo'.

En el *Capítulo* IX Harvey comienza diciendo: 'se presentan tres puntos a confirmar que, una vez hayan sido establecidos, espero que la verdad que pretendo se siga necesariamente, y aparezca como una cosa obvia para todos'.

Enunciados de primer nivel

Primer punto:

XX. La sangre, por la acción del corazón, es transmitida incesantemente de la vena cava a las arterias en una cantidad tal que no puede ser suministrada a partir de la ingesta.

XXI. La sangre, por la acción del corazón, es transmitida incesantemente de la vena cava a las arterias de forma tan conveniente que la masa entera (de sangre) pasa muy rápida a través del órgano.

Segundo punto:

XXII. La sangre, bajo la influencia del pulso arterial, entra y es impelida en una corriente

continua, uniforme e incesante a través de cada una de las partes y miembros del cuerpo.

XXIII. La sangre, impelida como se describió en XXII, está en mayor cantidad de lo que era suficiente para la nutrición o de lo que podía aportar la masa entera de fluidos.

Tercer punto:

XXIV. La sangre, habiendo sido impelida como se describió en XXII a través de cada una de las partes y miembros del cuerpo, es devuelta incesantemente desde todas las partes y miembros del cuerpo por las venas al corazón.

Harvey dice ahora: 'Probados estos puntos, pienso que será manifiesto que'

XL. La sangre propelida y devuelta, circula y da vueltas del corazón a las extremidades, de las extremidades al corazón, y realiza así una clase de movimiento circular.

En apoyo del primer punto se anticipan ahora los enunciados siguientes:

(20) En el cuerpo muerto el corazón retiene más de dos onzas de sangre.

XI. Las arterias se llenan y se distienden por la sangre forzada a entrar en ellas por la contracción de los ventrículos.

XXV. Al menos un cuarto del contenido total del corazón se arroja a la aorta en cada contracción.

XXVI. En la raíz de la aorta hay válvulas que previenen el regreso de la sangre desde ese vaso al ventrículo.

(21) En media hora el corazón late por lo menos 1.000 veces.

Aritméticamente: $\frac{1}{2}$ onzas $\times$ 1.000 = 500 onzas.

(22) El cuerpo entero contiene menos de 500 onzas de sangre.

'Sobre esta suposición, por tanto, asumida meramente como un fundamento para el razonamiento, vemos' que

XXVII. La masa entera de sangre en el cuerpo pasa a través del corazón de las venas a las arterias, y de igual forma a través de los pulmones. Y pasa más sangre a través del corazón a consecuencia de su acción de la que pueda ser suministrada por toda la ingesta, o de la que pueda estar contenida en las venas en el mismo momento.

Después sigue un número de enunciados de nivel cero confirmatorios de lo anterior:

(23) Sólo con que se divida una pequeña rama de la aorta toda la sangre del cuerpo, tanto de las venas como de las arterias, se vaciará en poco tiempo.

(24) La sangre mencionada en (23) proviene casi exclusivamente de las arterias.

(25) Si se ata la aorta en la base del corazón y se abre la carótida o cualquier otra arteria, se encontrará que están vacías y que sólo las venas están repletas de sangre.

(26) Después de la muerte, cuando el corazón ha cesado de latir, dividiendo las venas y las arterias yugulares o femorales, es imposible extraer mediante cualquier esfuerzo más de la mitad de la masa entera de la sangre.

(27) En los desmayos y en los estados de alarma, cuando el corazón late más lánguidamente y con menos fuerza, disminuyen o se detienen las hemorragias.

Este último enunciado es mencionado en confirmación de parte de XVII. El párrafo siguiente contiene un enunciado que parece estar en contradicción con (19). Harvey discute por qué 'en nuestras disecciones encontramos usualmente tan gran cantidad de sangre en las venas y tan poca en las arterias'. Dice que quizás sea porque 'como no hay pasaje a las arterias salvo a través de los pulmones y el corazón, cuando el animal ha cesado de respirar, y los pulmones de moverse,

se impide pasar a la sangre de la arteria pulmonar y las venas pulmonares, y desde allí al ventrículo izquierdo del corazón'. Un poco después dice:

Pero el corazón no deja de actuar en el mismo preciso momento que los pulmones, sino que los sobrevive y continúa latiendo durante un tiempo, el ventrículo izquierdo y las arterias siguen distribuyendo su sangre al cuerpo extensamente y mandándola a las venas; no recibiendo, sin embargo, nada de los pulmones, se agotan pronto, y quedan vacíos.

(19) se refiere presumiblemente al cuerpo *vivo*.

El *Capítulo* X empieza con el enunciado de que está confirmado el primer punto, aunque ese punto contenía la afirmación de que la cantidad de sangre que pasa a través del corazón es mayor de la que pueda ser suministrada por la ingesta, y hasta ahora Harvey no ha hecho más referencia a ese punto. Parece considerarlo tan obvio como para no requerir más justificación. Aquí se refiere ahora a ello diciendo que, aunque una vaca pueda dar tres, cuatro o incluso siete y más galones de leche en un día, sin embargo 'por cálculo, el corazón hace tanto y más en el curso de una hora o dos'.

En este capítulo ofrece más enunciados de nivel cero confirmatorios del primer punto:

(28) Si se atan las venas de las serpientes y de algunos peces en algún lugar por debajo del corazón, se queda vacío rápidamente un espacio entre la ligadura y el corazón.

(29) Si, en el mismo experimento descrito en (28) se ata la arteria, el corazón se distiende de forma inusual.

El *Capítulo* XI está dedicado al segundo punto. Harvey da primero los enunciados de primer nivel que desea establecer:

XXVIII. La sangre entra en un miembro por las arterias y sale de él por las venas.

XXIX. Las arterias son los vasos que llevan la sangre desde el corazón, y las venas son los canales que devuelven la sangre al corazón.

XXX. En los miembros y partes extremas del cuerpo la sangre pasa de las arterias a las venas o inmediatamente por anastomosis, o mediatamente por los poros de la carne, o de ambas formas, como en los pulmones.

Añade a estos enunciados el XXIII, que es parte del segundo punto.

Harvey discute a continuación las ligaduras y nos da dos definiciones:

[D.3] Una ligadura es *apretada* o perfecta cuando se cierra tan estrechamente sobre una extremidad que no puede sentirse el pulso en ningún vaso que esté después de ella.

(Harvey menciona que este tipo de ligadura se usa en la castración y en la extirpación de tumores. Al cortar la nutrición y el calor, testículos y tumores disminuyen y mueren).

[D.4] Una ligadura de *presión media* es la que comprime firmemente a un miembro en redondo, pero con poco dolor, y en tal forma que aún sufre un cierto grado de pulsación que se nota en la arteria que está detrás de ella.

(Este tipo, dice Harvey, se usa para obturar el paso de la sangre). Nótese que Harvey se cuida de no introducir nada que pertenezca al primer nivel en sus definiciones, que son estrictamente 'operacionales'. Da ahora un número de enunciados de nivel cero que envuelven los dos tipos de ligaduras.

(30) Si se coloca una ligadura apretada en una extremidad, no pulsa ninguna arteria

detrás de la ligadura, pero la arteria anterior empieza a elevarse mucho en cada diástole y a latir más violentamente. La mano mantiene su color natural, pero gradualmente empieza a bajar algo su temperatura.

(31) Si ahora se afloja un poco la ligadura de (30) de forma que se torne en una de presión media, la mano entera y el brazo se pondrán *profundamente teñidos* y distendidos; las venas se *harán túmidas y anudadas* y la *mano estará repleta de sangre.*

(32) En el momento del aflojamiento mencionado en (31), si se aplica el dedo a la arteria por el borde de la ligadura, puede sentirse la sangre como si se estuviera deslizando.

(33) El sujeto del experimento en (32) nota una sensación de calor moderado y de algo que hace su camino a lo largo del curso de los vasos y que se propaga a través de la mano que, al mismo tiempo, empieza a sentir calor y a distenderse.

(34) Cuando se aplica una ligadura de presión media, se hinchan las venas que están detrás de la ligadura, pero nunca las que están antes, mientras que las arterias se contraen. Sólo una presión muy fuerte mandará a la sangre detrás de la ligadura y causará que se eleven algunas de las venas en el brazo superior.

Harvey dice ahora: 'A partir de estos hechos es fácil para cualquier observador cuidadoso aprender que XXVIII'. Después de una discusión un poco más detallada de la conexión entre D.3, D.4, (30)-(34) y XXVIII, Harvey dice: 'Por lo tanto aparece claramente que'

XXXI. La ligadura evita la vuelta de la sangre a través de las venas a las partes anteriores a ella, y mantiene a las de abajo en un estado de distensión permanente.

XXXII. Las arterias, a despecho de la presión de la ligadura y bajo la fuerza y el impulso del corazón, envían la sangre de las partes internas del cuerpo a las partes que están detrás de la ligadura.

XXXIII. La ligadura apretada impide el paso de la sangre tanto en las arterias como en las venas; la ligadura de presión media no impide el paso a través de las arterias, sino sólo a través de las venas.

XXXIV. La sangre que se acumula en las venas debajo de la ligadura no proviene de las venas. (Ver (34)).

(35). Cuando se quita una ligadura de presión media el sujeto nota algo frío que recorre un camino ascendente y alcanza el codo o la axila.

Harvey dice que (31) es 'una indicación obvia de que' XXVIII (y no viceversa) y XXX, y también que

XXXV. Las venas tienen comunicaciones recíprocas.

Este último enunciado es confirmado además por:

(36) Cuando se afloja la ligadura como en (31) todas las venas se ponen túrgidas a la vez.

(37) Si, mientras las venas están túrgidas como en (36), se pincha con una lanceta cualquier vena pequeña, se contraen todas rápidamente.

A continuación Harvey expone cómo sus hipótesis de primer nivel explican el procedimiento en la flebotomía.

(38) En la flebotomía la ligadura se aplica *antes* de la parte que se punza, no después.

(39) En la flebotomía, cuando se afloja la ligadura o cuando se la aplica demasiado apretadamente, la sangre escapa sin fuerza.

El *Capítulo* XII concluye la discusión del segundo punto.

Harvey dice: 'Si estas cosas son así, otro punto al que me he referido ya, viz. XXI, se confirmará también; hemos visto que XXVIII; hemos visto, además,

que casi la totalidad de la sangre puede quitarse desde una punción hecha en una de las venas cutáneas del brazo si se aplica propiamente una ligadura (no sólo toda la cantidad del brazo, sino también toda la que está contenida en el cuerpo)'. Harvey no parece haber establecido esto previamente, pero se cubre presumiblemente por las referencias a la flebotomía. Entonces continúa:

Por tanto debemos admitir, primero XXXII (a causa de XI y de XXXVI. La fuerza y el movimiento de la sangre se derivan sólo del corazón); segundo que XX y XXI por XXXIV y

XXXVII. Las arterias no reciben sangre de parte alguna, salvo y excepto a partir del ventrículo izquierdo del corazón.

Ni podía tan gran cantidad de sangre extraerse de una vena (tratándose de una ligadura correctamente aplicada), ni con tal impetuosidad, facilidad y celeridad si no fuese a través del medio del poder impelitivo del corazón.

Luego Harvey se refiere de nuevo a sus cálculos de la cantidad de sangre que pasa y dice que a partir de estos 'percibiremos que una circulación es absolutamente necesaria, al ver que las cantidades indicadas no pueden suministrarse inmediatamente a través de la ingesta, y que son mucho mayores de lo que pueda requerirse para la mera nutrición de las partes'.

El capítulo termina con más referencias confirmatorias a la flebotomía.

(40) Cuando en el curso de una flebotomía sobreviene un estado de desfallecimiento en el que el corazón late más lánguidamente, la sangre no fluye libremente, sino que destila sólo gotas.

(41) Pero cuando en (40) el paciente se desembaraza de su temor y recobra su coraje, se incrementa el poder del pulso, las arterias comienzan a latir de nuevo con mayor fuerza y a conducir la sangre incluso a la parte que está ligada; de forma que ahora la sangre salta desde la punción de la vena y fluye en un torrente continuo.

En el *Capítulo* XIII se discute el tercer punto. Tenemos primero un número de enunciados de nivel cero sobre las válvulas de las venas:

(42) Las válvulas de las venas están dirigidas hacia arriba o hacia los troncos de las venas.

(43) Las partes de las válvulas están encaradas, se tocan mutuamente y así están tan a punto para entrar en contacto por sus bordes que, si cualquier cosa intenta pasar de los troncos a las ramas de las venas, o de los vasos mayores a los menores, lo impiden completamente.

(44) Las válvulas están dispuestas de tal forma que los cuernos de las que siguen están opuestos al centro de la convexidad de las que les preceden y así alternativamente.

(45) Los bordes de las válvulas de las venas yugulares cuelgan hacia abajo y están concertados de tal forma que evitan que la sangre suba hacia arriba.

(46) Las válvulas de las venas miran siempre hacia la base del corazón.

XXXVIII. Las válvulas están solamente hechas e instituidas para que la sangre no pase de las venas más grandes a las más pequeñas, lo que las rompería o causaría que se hicieran varicosas.

(47) Cuando intento que pase una sonda desde el tronco de las venas a las ramas más pequeñas, por mucho cuidado que ponga, encuentro que es imposible introducirla mucho de cualquier forma, debido a las válvulas, mientras que era más fácil empujarla en la dirección opuesta.

XXXIX. El efecto de la disposición de las válvulas en las venas es evitar todo movimiento de la sangre desde el corazón y la vena cava.

(48) Cuando se aplica una ligadura en el brazo antes del codo como para una flebotomía, se perciben ciertos nudos o elevaciones formados por las válvulas, las cuales se muestran así externamente.

(49) Cuando se presiona la sangre desde el espacio anterior a una de las válvulas, y el dedo presiona la vena en un lugar inferior, no tiene lugar una afluencia de sangre desde arriba. Pero el vaso anterior a la siguiente válvula hacia arriba continuará distendiéndose.

(50) Cuando se aplica una presión a la parte distendida de la vena referida en (49) la sangre no puede enviarse detrás de la válvula, y permanece vacía la parte de la vena que está detrás de la válvula.

Harvey dice: 'Por tanto será patente, que XXXIX'.

(51) Estando el brazo ligado como antes y apareciendo las venas llenas y distendidas, si se presiona en una parte del curso de la vena con la punta de un dedo y luego con otro dedo se empuja la sangre hacia arriba más allá de la válvula siguiente, se ve que esta porción de vena continúa vacía como antes, y la sangre no puede retroceder; pero al separarse el primer dedo aplicado, la vena se llena inmediatamente desde abajo.

Harvey dice 'que XXIV aparece más obviamente'. Indica entonces que puede calcularse la cantidad de sangre que pasa a través de una longitud de vena cuando se frota con el dedo como antes y entonces se ve 'que ha pasado mucha sangre a través de una cierta parte del vaso. Y ahora creo que os encontraréis convencidos de la circulación de la sangre y de su rápido movimiento'.

En el brevísimo *Capítulo* XIV dice Harvey: 'Desde todas estas cosas, argumento y demostración ocular, mostradas en XX, XXI (primer punto), XXII, XXIII (segundo punto) y XXIV (tercer punto) es absolutamente necesario concluir' que

XL. La sangre en el cuerpo animal es impelida en un círculo y está en un estado de movimiento continuo.

XLI. Esta propulsión de la sangre es el acto o función que realiza el corazón por medio de su latido.

XLII. La propulsión de la sangre es el solo y único fin del movimiento y contracción del corazón.

Esto concluye la exposición sistemática de la teoría de Harvey. Pienso que está claro que no hacemos justicia a Harvey si nos contentamos con llamarle 'el descubridor de la circulación de la sangre'. Los historiadores han dedicado mucho esfuerzo a las discusiones sobre las reclamaciones rivales a este título, pero no parecen haber considerado la posibilidad de que *nadie* descubrió la circulación de la sangre. El que la sangre circule es tan hipótesis hoy como lo era en el tiempo de Harvey, pero hoy es una hipótesis mucho mejor confirmada que en la época de Harvey. Harvey afirma frecuentemente que él apela sólo a 'la observación (o 'sentido', como la llama) y a la razón' en lugar de darse por contento con las opiniones de antiguas autoridades, aunque no vacila en citar los puntos de vista de Aristóteles, Galeno, Columbus y otros, cuando éstos apoyan sus argumentos. Sus admiradores posteriores parecen haber subrayado su apelación a la observación y haber ignorado su apelación a la razón. ¿Qué significaba Harvey por su 'apelación a la razón'?

El procedimiento de Harvey es, claramente, como sigue: En cada sección de su obra da un número de enunciados de nivel cero y luego pasa a enunciar las hipótesis explicativas de primer nivel que tales enunciados sugieren. Algunas veces

da primero las hipótesis y después los enunciados de nivel cero que las sugieren. A continuación procede a desarrollar las consecuencias lógicas de sus hipótesis de primer nivel, entre las que tenemos por fin el enunciado de que la sangre se mueve en círculo. Harvey se refiere a esta parte del trabajo cuando habla de una apelación a la razón. Frecuentemente añade más enunciados de nivel cero por vía de confirmación de estas consecuencias, y asimismo de las hipótesis de las que se derivan. En esta conexión es interesante el párrafo que concluye su libro. Lo doy en el latín original y en dos traducciones:

Haec omnia phaenomena inter dissecandum observanda et plurima alia, si recte persensa fuerint, ante dictam veritatem videntur luculenter illustrare et plane confirmare, simulque vulgaribus opinionibus adversari; cum quam ob causam ita constituta sint et facta haec omnia difficile cuiquam admodum sit (nisi quo nos modo) explicare.

Traducción de Laeke:

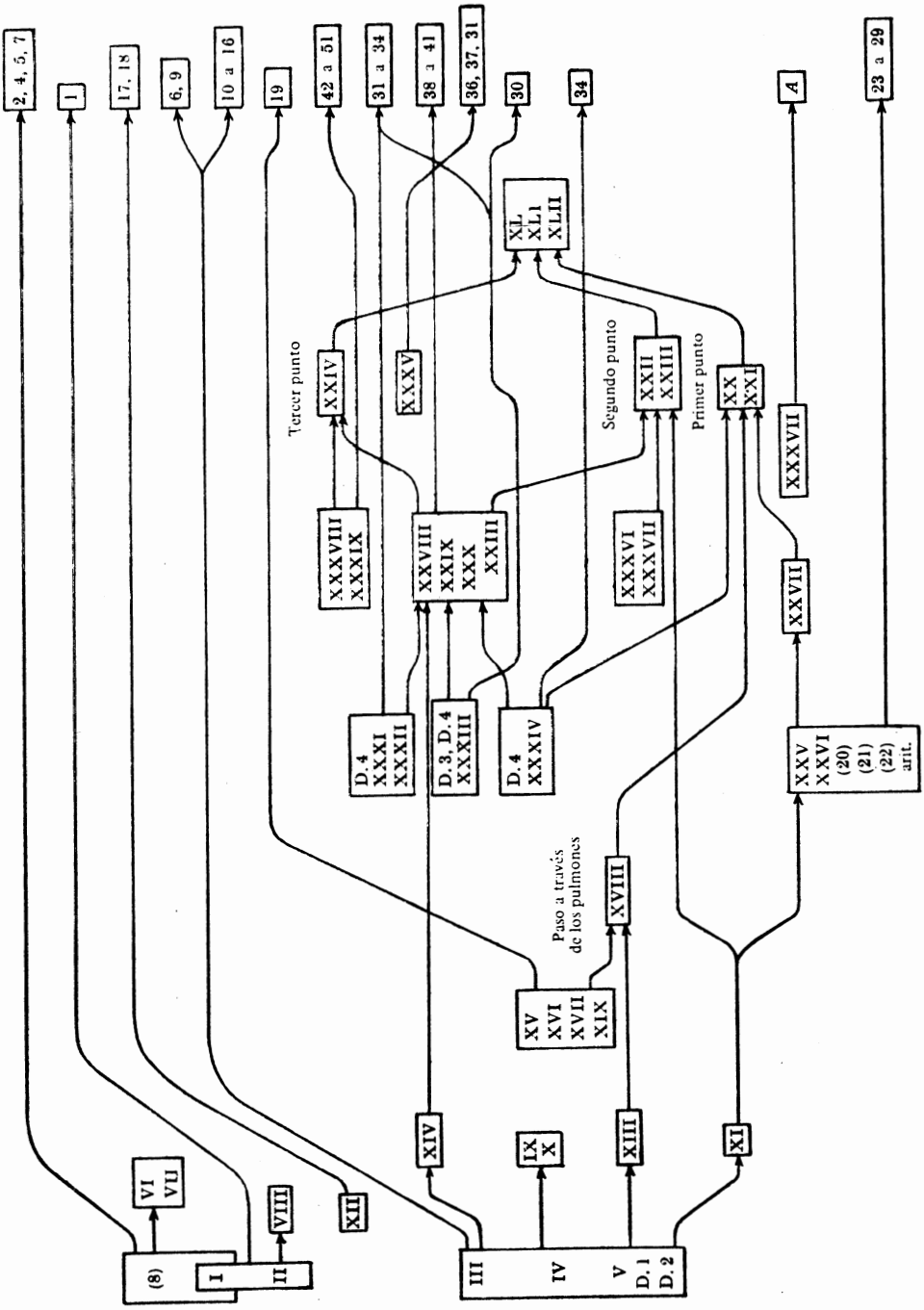
Todos estos fenómenos y muchos otros notados en la disección, si se juzgan correctamente, parecen ilustrar claramente y confirmar la verdad anunciada en este tratado, y al mismo tiempo refutar la opinión popular. Ciertamente sería difícil explicar de cualquier otra forma por qué todas estas materias están así hechas y constituidas de forma que confirman mi teoría y lo que yo he expuesto.

Traducción de Willis:

Todas estas apariencias, y muchas otras, que se notan en el curso de la disección, si se sopesan adecuadamente, parecen ilustrar claramente y confirmar plenamente la verdad contenida a través de estas páginas, y que al mismo tiempo están en oposición a la opinión vulgar; pues sería muy difícil explicar en cualquier otra forma con qué fin todo se construye y se ordena como hemos visto que es.

Nuestra tarea siguiente es construir un mapa que muestre, si es posible, cómo creía Harvey que sus enunciados se conectaban por la relación de consecuencia. Construyendo el mapa adjunto he hecho lo más posible para conectar estos enunciados en la forma que él parece haber querido que estuvieran conectados, en la medida en que ello pueda ser descubierto a partir de sus enunciados metodológicos. Se verá que en algunos casos la consecuencia *no* se sigue estrictamente de las hipótesis tal como están formuladas. En muchos casos esto es porque se asume implícitamente algo que Harvey espera que el lector supla por sí mismo, tal como un dato anatómico familiar o creencias del sentido común sobre el pasaje de los fluidos a través de los tubos. Pero en unos pocos casos parece que se asume mucho más, e.g. XLII. El enunciado XXXVII se apoya en una base anatómica obvia que he marcado '*A*' en el mapa. Por otra parte, XXXVI parece que no tiene soporte de nivel cero. Laeke remarca que 'los Capítulos sexto y séptimo, sobre la circulación pulmonar, son embrollados. Hay una buena discusión de los aspectos comparativo y embriológico del tema, y luego un uso peculiar de la autoridad tradicional de Galeno como evidencia'. Como he indicado, esta es la parte más débil de la exposición, con muy poco soporte de nivel cero. Esto se ve fácilmente en el mapa. El argumento de Harvey es aquí un argumento de propaganda en gran medida —un uso de la persuasión más que una apelación a la razón.

Es curioso que Harvey no preste más énfasis a su consideración sobre la cantidad


2, 4, 5, 7
1
17, 18
6, 9
10 a 16
19
42 a 51
31 a 34
38 a 41
36, 37, 31
30
34
4
23 a 29
Tercer punto
Segundo punto
Primer punto
Paso a través de los pulmones
(8)
I
II
III
IV
V
D. 1
D. 2
VI
VII
VIII
XII
XIV
IX
X
XIII
XV
XVI
XVII
XIX
XVIII
XI
XXIV
XXXV
XXXVIII
XXXIX
XXVIII
XXIX
XXX
XXIII
D. 4
XXXI
XXXII
D. 3, D. 4
XXXIII
D. 4
XXXIV
XXXVI
XXXVII
XXII
XXIII
XX
XXI
XL
XLI
XLII
XXXVII
XXVII
XXV
XXVI
(20)
(21)
(22)
artt.

de fluido ingestado comparada con la cantidad de sangre que pasa a través del corazón. Si observamos que a razón de 500 onzas de sangre por media hora tendremos 24.000 onzas en 24 horas, veremos que pasa en 24 horas casi ocho veces el peso de un hombre de 80 kilos, y ¡ningún hombre ingiere más de ocho veces su propio peso en 24 horas! Sin embargo, aun esta estimación se queda corta, porque estimar en 1.000 los latidos del corazón en media hora es insuficiente.

En el mapa adjunto, cuando una flecha va de un enunciado a otro, significa que se necesita el primer enunciado para la derivación del último. Así, el condicional formado por la conjunción de *todos* los enunciados desde los que la flecha va a un enunciado dado A, como su antecedente, y A mismo como su consiguiente, es un condicional analítico, o lo sería si A debe ser una consecuencia de los enunciados conjuntados. Este mapa podría alargarse considerablemente añadiéndole las discusiones confirmatorias de los *Capítulos* XV, XVI y XVII y también los argumentos polémicos negativos de la introducción. También podría arrojarse más luz sobre las intenciones metodológicas de Harvey por un latinista que pudiese comparar este punto de vista con el latín original de Harvey, y estuviese familiarizado con las creencias metodológicas que eran corrientes en el tiempo de Harvey.

PARTE II

PROBLEMAS METODOLOGICOS EN GENETICA

CAPITULO III

§ 1. *Introducción.*

En esta parte intentaremos aplicar a algunas de las nociones básicas de genética los principios discutidos en la Parte I. Nos mantendremos en el nivel observacional, ya que en este nivel se verifican todas las hipótesis, y es, por tanto, de la mayor importancia que en él se clarifiquen, desde un principio y en la medida de lo posible, las dificultades metodológicas.

Procederemos, además, sobre el supuesto de que es este un libro elemental para no iniciados. Por esta razón no nos ajustaremos, en el cuerpo del texto que subsigue, al rigor del método axiomático; sino que discutiremos ciertas nociones básicas no definidas y, al menos, algunos de los axiomas que se requieren para introducirlas en un sistema formal. Luego discutiremos algunas de sus más importantes consecuencias. Pero sólo en los Apéndices se seguirá un procedimiento formal estricto. Por lo demás tampoco se ofrecerá aquí una exposición sistemática de la teoría de conjuntos. Para ello el lector deberá remitirse a los correspondientes libros de texto; a este respecto se dará una relación de títulos. Las ideas y notación de la teoría de conjuntos serán, empero, gradualmente introducidas en el curso de la exposición e ilustradas con ejemplos.*

§ 2. *La relación de parte.*

Esta relación ha sido tratada con detalle en dos publicaciones previas del autor: *The Axiomatic Method in Biology* (1937) (tanto en el texto como en el Apéndice E, escrito por Alfred Tarski); y *The Technique of Theory Construction.* Sólo unos cuantos puntos necesitan aquí de aclaración. Para simbolizar dicha relación escribimos: '$x\mathbf{P}y$' por 'x es parte de y', lo cual es susceptible de admitir *dos* interpretaciones: *o bien* x es una parte *propia* de y, *o bien* x es la *totalidad* de y. A primera vista ello puede parecer extraño, pero en la práctica es conveniente disponer de esa amplitud de interpretación. Si deseamos decir que x es una parte, pero *no* la *totalidad* de y, podemos escribir: $x\mathbf{Pp}y$. '$\mathbf{Pp}$' es así una noción definida, y su definición es como sigue:

[D.1] $$\mathbf{Pp} = \hat{x}\hat{y}\{x\mathbf{P}y \cdot x \neq y\}.$$

---

* Véase también Nota 1, p. 48.

Esto debe leerse: **Pp** es la relación en que se encuentra x con y cuando x es una parte de y, pero no es idéntica a y. Los signos que ostentan circunflejos antes de la llave forman lo que se denomina símbolos de abstracción. Un importante axioma que gobierna esta relación es el que afirma que **P** es *transitiva*. Ello significa que dados tres términos x, y y z, y cualesquiera que sean, si tenemos $x\mathbf{P}y$ e $y\mathbf{P}z$, entonces tenemos también $x\mathbf{P}z$.

Una noción muy útil que puede ser definida por medio de **P**, es la noción de *suma* de un conjunto de partes. Supóngase que X es un conjunto de partes de un objeto y, y supóngase además que *toda* parte z de y es tal que hay partes de z que son partes de miembros de X; en ese caso el objeto y es la suma de X. La definición formal se expresa en la forma de una relación de dos términos entre y y X así:

[D.2] $$\Sigma = \hat{y}\hat{X}\{X \subseteq \mathbf{P}s'y \;\&\; (z): z\mathbf{P}y \cdot \supset \cdot \mathbf{P}''X \cap \mathbf{P}s'z \neq \Lambda\}.$$

En esta fórmula 'Σ' es la designación de la relación a definir. '$\mathbf{P}s'y$' denota las partes de y. $\mathbf{P}''X$ es la notación correspondiente a clases o conjuntos, y denota la clase de partes de miembros del conjunto X. El signo '$\cap$' es el signo del conjunto de todos los miembros que pertenecen a *ambos* conjuntos cuyas designaciones preceden o siguen a dicho signo. Así $\mathbf{P}''X \cap \mathbf{P}s'z$ es el conjunto de todos los objetos que son a la vez partes de miembros de X y partes de z. El signo Λ es el signo del conjunto vacío, de modo que la última parte de la definición establece que el conjunto $\mathbf{P}''X \cap \mathbf{P}s'z$ no es vacío, sino que tiene miembros. Si se supone que todo conjunto no vacío de objetos que tienen partes tiene al menos una suma, puede probarse que tiene *todo lo más* una suma, de suerte que podemos hablar de *la* suma de ese conjunto.

Podemos utilizar convenientemente esta noción para definir otro funtor que designe al objeto formado por dos o más cosas que estén mutuamente en una determinada relación; por cuya razón se lo denominará el *funtor composición*. Así por ejemplo, supóngase que utilizamos la letra R para denotar la relación entre un hombre y un caballo cuando el hombre cabalga el caballo. De forma que xRy significa: x cabalga y. Ahora podemos usar llaves para formar la designación de un conjunto cuyos miembros están especificados individualmente. De este modo si Jorge y Juan son dos personas, {Jorge, Juan} denotará el conjunto que consta cabalmente de estas dos personas; y si $\{x, y\}$ es un conjunto que consta de un hombre y un caballo, entonces $\Sigma(\{x, y\})$ será la suma de este conjunto. Habrá ocasiones en que x cabalgue a y, y ocasiones en que no lo haga. En la definición que sigue confinamos la designación a los casos en que el hombre cabalga el caballo:

[D.3] $\mathrm{c}(R, x, y)$ es *el* objeto u compuesto de un hombre cabalgando un caballo si y sólo si: $xRy \;\&\; u = \Sigma(\{x, y\})$. Si ahora prescindimos de la referencia a los hombres cabalgando sobre caballos y tratamos a x, a y y a R como variables, esta definición puede valer como definición de cualquier objeto compuesto que envuelva solamente dos partes y éstas se encuentren una con otra en una relación requerida. La noción puede fácilmente ser definida para un número mayor de partes y para las correspondientes relaciones de varios términos. Ya que disponemos

de esta expresión para objetos individuales compuestos, podemos hacer uso de ella para construir una definición correspondiente para conjuntos de cosas (utilizando una '**C**' mayúscula para distinguir este funtor del primero):

[D.4] **C** (R, X, Y) es el conjunto de todos los objetos u para los cuales existen un x y un y tales que $u = \mathbf{c}\,(R, x, y)$ y $x \in X, y \in Y$. Es, pues, el conjunto de todos los objetos compuestos con respecto a la relación R cuando una parte está en R con la otra, y la primera es un miembro del conjunto X y la segunda es un miembro del conjunto Y.

Entre los varios teoremas que pueden probarse a partir de los axiomas que gobiernan el uso de **P** y que figuran en los libros más arriba citados, está el siguiente:

Para todo x y todo y, $x\mathbf{P}y$ & $y\mathbf{P}x$ si y sólo si $x = y$.

§ 3. *La relación de precedencia en el tiempo.*

Esta relación ha sido asimismo detalladamente tratada en los libros mencionados con referencia a la relación de parte. Escribimos '$x\mathbf{T}y$' por 'x precede a y en el tiempo'. Pero aquí nos las habemos también con varias interpretaciones alternativas. Podemos entender que *toda* parte de x precede a toda parte de y en el tiempo, o podemos pensar que el fin de x coincide en el tiempo con el comienzo de y. Interpretaremos **T** entendiendo que se da entre dos objetos cuando *cualquiera* de esas alternativas es verdadera. Podemos así definir a:

[D.1] Un *objeto momentáneo* como el que está en esa relación consigo mismo, ya que en un objeto momentáneo se identifican comienzo y fin. Entre los axiomas a adoptar figuran los siguientes:

[A.2.1] **T** es transitiva.
De modo que para todo x, y y z.
Si $x\mathbf{T}y$ e $y\mathbf{T}z$, entonces $x\mathbf{T}z$.

[A.2.11] Si x e y son ambos momentáneos, entonces $x\mathbf{T}y$ o $y\mathbf{T}x$.

[A.2.12] Una cosa x está en **T** con una cosa y si y sólo si toda parte momentánea de x está en **T** con toda parte momentánea de y.

En el caso de cosas puramente momentáneas es conveniente disponer de un signo separado '**Z**' para la relación que guardan entre sí cuando una precede totalmente a la otra en el tiempo. Entonces $x\mathbf{Z}y$ se da cuando $x\mathbf{T}y$ pero *no* $y\mathbf{T}x$.

[D.2] Diremos que una cosa momentánea x *coincide en el tiempo* con una cosa y si y sólo si $x\mathbf{T}y$ e $y\mathbf{T}x$.

Podemos ahora definir la útil noción de *lámina temporal* de un objeto extenso en el tiempo. Escribimos '$x\mathbf{S1}y$' si y sólo si x es momentáneo y una parte de y, y todo lo que es una parte de y y es coincidente en el tiempo con x es también una parte de x.

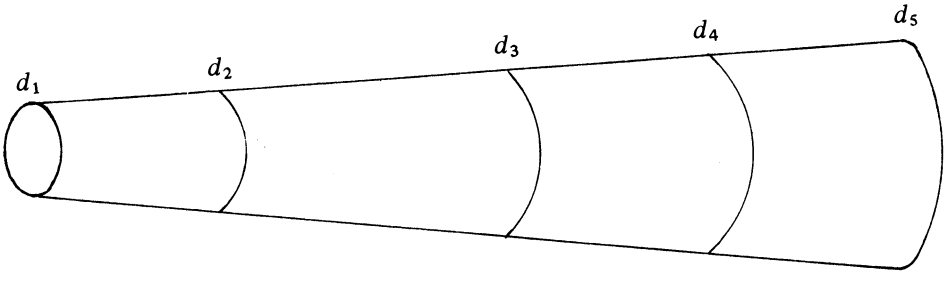
[D.3] Con ayuda de la noción de lámina temporal podemos definir el comienzo o primera lámina temporal de una cosa. Escribimos: '$x\mathbf{B}y$' por x comienza y, y decimos: $x\mathbf{B}y$ si y sólo si $x\mathbf{S1}y$ y no hay objeto z tal que $z\mathbf{S1}y$ y $z\mathbf{T}x$ y $z \neq x$.

Similarmente escribimos '$x\mathbf{E}y$' por x termina y, y decimos:

[D.4] $x\mathbf{E}y$ si y sólo si $x\mathbf{S1}y$ y no hay z tal que $z\mathbf{S1}y$ y $x\mathbf{T}z$ y $z \neq x$. Puede probarse entonces que una cosa puede tener uno y sólo un comienzo y uno y sólo un fin.

§ 4. *Biontes.*

Al objeto de evitar vocablos tales como "organismo", al que se vinculan ciertas ambigüedades, es deseable introducir un nuevo término que no será definido dentro de nuestro sistema, sino inicialmente introducido mediante elucidaciones que envuelven palabras no pertenecientes al sistema restringido que vamos a construir. Empezaremos por dar un ejemplo concreto de lo que se pretende, acompañado del diagrama de un objeto extenso en el tiempo del tipo requerido.



Supóngase que existe un elefante llamado Sally. El acto de unión de esperma y óvulo que dio comienzo a Sally tuvo lugar en el momento marcado con d_1, que fue, por consiguiente, el comienzo de Sally. En el momento marcado con d_2 nació Sally; en d_3, Sally perdió una parte cuando su rabo fue cortado por la dentellada de un león. En d_4 Sally volvió a perder una parte al desprenderse un óvulo de un ovario para asentarse en el útero. Asimismo a intervalos (no indicados en el diagrama) adquirió partes Sally cuando el aire y el alimento penetraron en las cavidades de su cuerpo, con lo cual moléculas de esas sustancias fueron asimiladas por las células vivas y pasaron al torrente sanguíneo. Por último, en d_5 Sally llegó a su fin merced a la bala del rifle de un cazador. Ahora bien, no solamente es Sally, desde d_1 a d_5, un ejemplo de bionte, sino que todo segmento temporal, como el que va de d_1 a d_2, o de d_2 a d_3, o de d_3 a d_5, y en general de *cualquier* lámina temporal de Sally a otra posterior, es también un ejemplo de bionte. Y todos ellos, por añadidura, reciben el nombre de Sally. De hecho, si adoptamos el axioma (que no ha sido mencionado aún) de que entre dos láminas temporales cualesquiera de un objeto extenso en el tiempo hay siempre una tercera, entonces ¡resultará que Sally tiene un número infinito de láminas temporales y una infinidad de partes que son biontes!

Una vez suministrada esta indicación de lo que se entiende por un bionte, procedamos ahora a enumerar, en términos generales, algunos de sus rasgos característicos:

1) Todo bionte tiene un comienzo y un fin en el tiempo, que son distintos entre sí.

2) Todo bionte ostenta una estructura temporal.

3) Todo bionte ocupa un lugar en el sistema taxonómico de la biología.

4) Todo bionte o bien es una célula, o bien tiene células (que no son biontes) entre sus partes propias.

5) No todas las células son biontes. Las células (cigotos) que resultan de la unión de los gametos masculino y femenino son biontes, pero los gametos antes de la unión no son biontes. Un huevo que se desarrolla sin fertilización es un bionte.

6) Muchos biontes, aunque no todos, terminan en un cadáver, que no es un bionte.

Adoptaremos los siguientes Axiomas que, dentro de nuestro sistema, gobiernan el uso de la noción de bionte.

[A.1] Para todo bionte x, $\mathbf{B}(x) \neq \mathbf{E}(x)$.

La primera lámina temporal de cada bionte es distinta de la última, i. e. cada bionte está extendido en el tiempo.

[A.2] Para cualesquiera biontes x e y, si $\mathbf{Ps}(\mathbf{B}(x)) \cap \mathbf{Ps}(\mathbf{B}(y)) \neq \Lambda$ o $\mathbf{Ps}(\mathbf{E}(x)) \cap \mathbf{Ps}(\mathbf{E}(y)) \neq \Lambda$, entonces $x\mathbf{P}y$ o $y\mathbf{P}x$.

Si las primeras láminas temporales de dos biontes cualesquiera tienen partes en común o si sus últimas láminas temporales tienen partes en común, entonces un bionte es parte del otro.

[A.3] Para cualesquiera biontes x, y y z, si $z\mathbf{P}x$ y $z\mathbf{P}y$ y $\mathbf{B}(x)\mathbf{Z}\ \mathbf{B}(z)$ y $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(z)$ y $\mathbf{E}(z)\mathbf{Z}\ \mathbf{E}(y)$ y $\mathbf{B}(y) = \mathbf{B}(z)$, entonces hay un bionte w, tal que $\mathbf{B}(w) = \mathbf{B}(x)$ y $\mathbf{E}(w) = \mathbf{E}(y)$.

Si x, y y z son tres biontes cualesquiera, tales que z es parte de x y de y, y la primera lámina temporal de x precede en el tiempo a la de z, y la última lámina temporal de x es idéntica a la última de z, y la última lámina temporal de z precede en el tiempo a la última de y, y la primera lámina temporal de y es idéntica a la primera lámina temporal de z, entonces hay un bionte w cuya primera lámina temporal es idéntica a la primera de x, y cuya última lámina temporal es idéntica a la última de y.

[A.4] Para cualquier bionte x y cualesquiera láminas temporales u y v, si $u\mathbf{S}1x$ y $v\mathbf{S}1x$ y $u\mathbf{Z}v$ entonces hay un bionte w tal que $\mathbf{B}(w)\mathbf{P}u$ y $\mathbf{E}(w)\mathbf{P}v$.

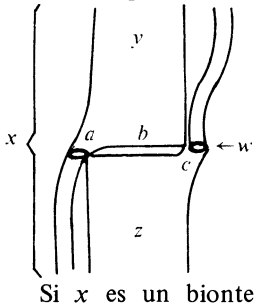
Si x es cualquier bionte y u y v son cualesquiera láminas temporales de x tales que u precede en el tiempo a v, entonces existe un bionte w tal que su primera lámina temporal está en la relación **P** con u y su última lámina temporal está en la relación **P** con v.

[A.5] Para todo x y u, si x es un bionte y $u\mathbf{S1}x$ y $u \neq \mathbf{B}(x)$ y $u \neq \mathbf{E}(x)$, entonces hay biontes y y z tales que $\mathbf{B}(y) = \mathbf{B}(x)$ y $\mathbf{E}(y)\mathbf{P}u$ y $\mathbf{B}(z)\mathbf{P}u$ y $\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}(x)$.

Si x es un bionte y u es cualquier lámina temporal de x excepto la primera y la última, entonces existen biontes y y z tales que el comienzo de y es idéntico con el comienzo de x y el final de y es una parte de u, y el comienzo de z es una parte de u y el final de z es idéntico con el final de x.

Al considerar los Axiomas 4 y 5 debe recordarse que un bionte es un objeto que, en el curso del metabolismo, está continuamente adquiriendo y perdiendo partes. En consecuencia, una lámina temporal de un bionte puede ser de uno de los siguientes tipos: (1) puede estar en un momento en el que no está ganando o perdiendo ninguna parte; (2) puede estar en un momento en el que el bionte gana una parte pero no pierde ninguna; (3) puede estar en un momento en el que el bionte pierde una parte pero no gana ninguna; (4) puede estar en un momento en el que una parte es ganada y una parte es perdida.

Esta última posibilidad está ilustrada en el diagrama adjunto, en el cual w es una lámina temporal de un bionte x, que tiene tres partes marcadas *a*, *b* y *c*. La suma de *a* y *b* es la última lámina del bionte y, siendo *a* el comienzo de una parte perdida; *b* y *c* forman el comienzo del bionte z, y *c* es el final de lo que previamente no era parte de x.



Con la ayuda de estos axiomas pueden ser probados (entre otros) los siguientes teoremas.

[T.1] Si x es un bionte e y es un bionte, y $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(y)$ y $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(y)$, entonces $x = y$. (Por A.2 y el teorema dado al final del § 2, en D.4).

[T.2] Si x es un bionte e y es un bionte y $\mathbf{E}(x)\mathbf{Z}\,\mathbf{B}(y)$ y existe un bionte w tal que $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(w)$ y $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(w)$ entonces existe un bionte z tal que $\mathbf{E}(x)\mathbf{P}\,|\breve{\mathbf{P}}\,\mathbf{B}(z)$ y $\mathbf{B}(y)\mathbf{P}\,|\breve{\mathbf{P}}\,\mathbf{E}(z)$. (Por A.4). Obsérvese que $\mathbf{P}\,|\breve{\mathbf{P}}$ es el producto relativo de la relación $\mathbf{P}$ con su conversa. Significa que hay una lámina temporal u tal que $\mathbf{E}(x)\mathbf{P}u$ y $\mathbf{B}(z)\mathbf{P}u$, y una lámina temporal v tal que $\mathbf{B}(y)\mathbf{P}v$ y $\mathbf{E}(z)\mathbf{P}v$.

Volvémonos ahora a considerar clases de biontes y relaciones entre biontes.

Si x e y son biontes y z es un bionte del cual x e y son partes, llamamos a z un *bionte continente* de x y de y. Denotamos a este conjunto por $\mathbf{bc}(x, y)$, definiéndolo así:

[D.1] $$\mathbf{bc}(x, y) = \hat{z}\{x, y, z \in \textit{bionte} \;\&\; x\mathbf{P}z \;\&\; y\mathbf{P}z\}$$

(donde '$\in$' es el signo de la relación de miembro del conjunto y se lee: "es un miembro de").

Similarmente, si x e y son biontes y z es un bionte que es parte de x y de y, llamamos a z un *bionte contenido* por x y por y.

[D.2] $$\mathbf{cb}(x, y) = \hat{z}\{x, y, z \in \textit{bionte} \;\&\; z\mathbf{P}x \;\&\; z\mathbf{P}y\}.$$

Son susceptibles de prueba los siguientes teoremas.

[T.3] Si $\mathbf{cb}(x, y) \neq \Lambda$, entonces $\mathbf{bc}(x, y) \neq \Lambda$. (Por A.3).

[T.4] Si $\mathbf{bc}(x, y) \cap \mathbf{cb}(x, y) \neq \Lambda$, entonces $x = y$.

Este teorema afirma que si hay un bionte que es *a la par* continente de x e y, y contenido por x e y, entonces $x = y$.

Prueba: Si $z \in \mathbf{bc}(x, y)$, entonces por D.1

$$x\mathbf{P}z \quad \text{e} \quad y\mathbf{P}z$$

y si $z \in \mathbf{cb}(x, y)$ entonces por D.2

$$z\mathbf{P}x \quad \text{y} \quad z\mathbf{P}y.$$

Pero si $x\mathbf{P}z$ y $z\mathbf{P}y$, entonces $x\mathbf{P}y$ (**P** es transitiva) y si $y\mathbf{P}z$ y $z\mathbf{P}x$, entonces $y\mathbf{P}x$ (por la misma razón). Pero, como se advirtió al final del § 2,

$$\text{si } x\mathbf{P}y \text{ e } y\mathbf{P}x, \text{ entonces } x = y.$$

Pasamos a considerar ahora las relaciones entre biontes. Diremos que un bionte x es *cobióntico* con un bionte y si y sólo si hay un bionte continente de x y de y.

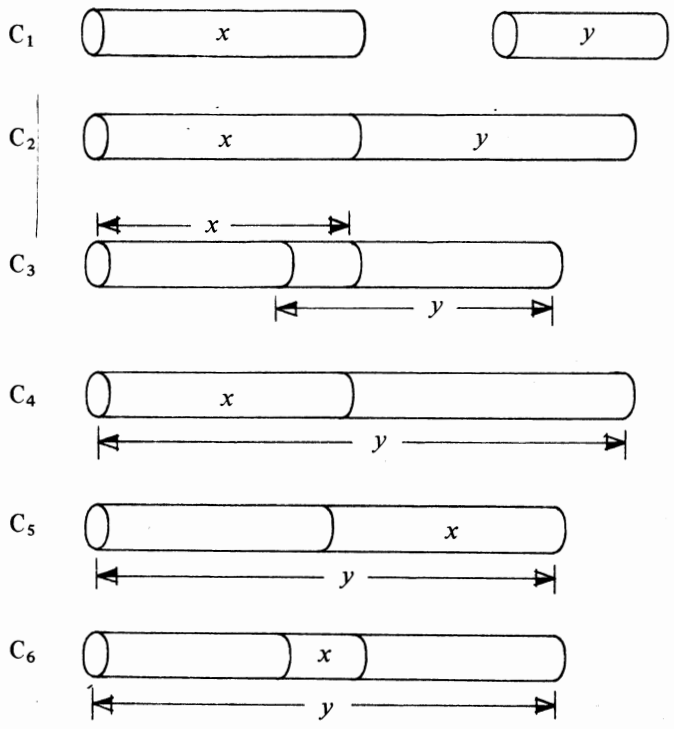
[D.3] $$\mathbf{Cob} = xy\{\mathbf{bc}(x, y) \neq \Lambda\}.$$

Esta definición èstablece que **Cob** es la relación en que se encuentra x con respecto a y cuando el conjunto de biontes que contienen a ambos no es vacío.

Podemos dividir las relaciones entre biontes cobiónticos en dos grupos, según que los biontes concernientes tengan o no biontes contenidos, es decir, según que para un par cobióntico dado x, y, tengamos que $\mathbf{cb}(x, y) \neq \Lambda$ o $\mathbf{cb}(x, y) = \Lambda$. En este último caso quedan dos alternativas que se excluyen entre sí: o bien x e y no tienen en absoluto partes en común, relación a la cual llamaremos provisionalmente C_1; o bien el final de un bionte se encuentra en $\mathbf{P} \mid \breve{\mathbf{P}}$ con respecto al principio del otro, a lo cual llamaremos C_2.

Volviéndonos al caso en que $\mathbf{cb}(x, y) \neq \Lambda$, podemos volver a distinguir aquí dos alternativas que se excluyen mutuamente $x = y$ o $x \neq y$. La segunda de estas alternativas puede a su vez dividirse según que *o bien*: x o y es un miembro de $\mathbf{cb}(x, y)$, *o bien* ninguno de ambos es un miembro de $\mathbf{cb}(x, y)$. En este último caso x e y se superpondrán en un bionte que es parte de ambos, aunque no se identifique con ninguno de ellos. Llamaremos a esta relación C_3. Volviendo a la alternativa en que o x o y es miembro de $\mathbf{cb}(x, y)$ tendremos dos posibilidades: o bien (i) sus comienzos son idénticos, o sus fines son idénticos, aunque no ambos (porque ello nos retrotraería al caso de $x = y$); o bien: (ii) ni los comienzos ni los fines son idénticos. A la relación que surge cuando los comienzos son idénticos, la llamaremos C_4; a la que surge cuando los fines son idénticos la llamaremos C_5, y a la que surge cuando ni los comienzos ni los fines son idénticos la llamaremos C_6.

Estas posibilidades pueden ser expuestas en un diagrama como sigue:



y su clasificación se dispone del modo siguiente:

x **Cob** y

$\mathbf{cb}(x, y) = \Lambda$

$\mathbf{Ps}(x) \cap \mathbf{Ps}(y) = \Lambda$ *

C_1

$\mathbf{E}(x)\mathbf{P} \circ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}(y)$

o

$\mathbf{E}(y)\mathbf{P} \circ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}(x)$

C_2

$\mathbf{cb}(x, y) \neq \Lambda$

$x = y$

† $\sim (x \in \mathbf{cb}(x, y))$

$\sim (y \in \mathbf{cb}(x, y))$

C_3

$\mathbf{B}x = \mathbf{B}y$

o

$\mathbf{E}x = \mathbf{E}y$

C_4

$x \neq y$

$x \in \mathbf{cb}(x, y)$ o

$y \in \mathbf{cb}(x, y)$

$\mathbf{B}(x) \neq \mathbf{B}(y)$

$\mathbf{E}(x) \neq \mathbf{E}(y)$

C_5

C_6

* $\mathbf{Ps}(x)$ denota el conjunto de todas las partes de x.

† $\sim (\ )$ es el signo de negación del enunciado que va entre paréntesis.

La clasificación antes expuesta se ha basado principalmente en la relación de parte. Pasamos ahora a la consideración de las relaciones entre biontes cobiónticos tomando por base las relaciones *temporales* entre sus comienzos y fines. Podemos agrupar a éstas en cuatro apartados:

I. Posibles relaciones entre el comienzo de x y el comienzo de y, cuando $x\mathbf{Cob}y$.
II. Relaciones posibles entre el comienzo de x y el fin de y, cuando $x\mathbf{Cob}y$.
III. Relaciones posibles entre el fin de x y el comienzo de y, cuando $x\mathbf{Cob}y$.
IV. Relaciones posibles entre el fin de x y el fin de y, cuando $x\mathbf{Cob}y$.

Bajo cada uno de estos cuatro encabezamientos hay a su vez tres posibilidades: *A*: una lámina temporal precede a la otra en el tiempo; o *C*: esta otra precede a la primera; o *B*: las dos láminas temporales son idénticas en los casos I y IV, o una está en la relación $\mathbf{P} \mid \breve{\mathbf{P}}$ con respecto a la otra en los casos II y III.

Estas posibilidades pueden distribuirse en una tabla de tres columnas y cuatro filas del modo que sigue:

I.

A: $\mathbf{B}(x)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{B}(y)$.	*B*: $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(y)$.	*C*: $\mathbf{B}(y)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{B}(x)$.

II.

A: $\mathbf{B}(x)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{E}(y)$.	*B*: $\mathbf{B}(x)\,\mathbf{P} \mid \breve{\mathbf{P}}\,\mathbf{E}(y)$.	*C*: $\mathbf{E}(y)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{B}(x)$.

III.

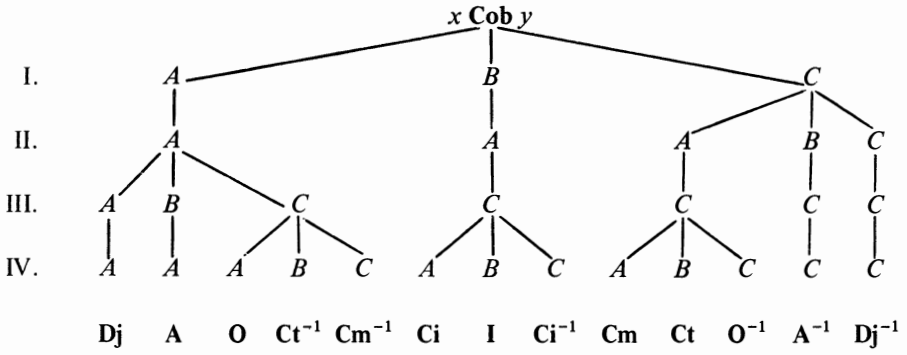
A: $\mathbf{E}(x)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{B}(y)$.	*B*: $\mathbf{E}(x)\,\mathbf{P} \mid \breve{\mathbf{P}}\,\mathbf{B}(y)$.	*C*: $\mathbf{B}(y)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{E}(x)$.

IV.

A: $\mathbf{E}(x)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{E}(y)$.	*B*: $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(y)$.	*C*: $\mathbf{E}(y)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{E}(x)$.

Las tres opciones que se ofrecen bajo cada una de las alternativas I a IV son mutuamente exclusivas y no todas las posibilidades de opción de las cuatro líneas son autoconsistentes. De hecho, de todas las opciones posibles sólo trece son consistentes con los axiomas que gobiernan la relación **T**. Las que lo son, figuran en la página siguiente en un diagrama jerárquico que comienza con las tres opciones de la línea I y pasa después, sucesivamente, a las opciones consistentes posibles de las líneas II, III y IV. A la base del diagrama se muestran los símbolos que aquí se utilizan para las relaciones así determinadas.

Se observará que si se dobla el diagrama en sentido vertical por su línea media (cuya cabeza es *B* y cuya base es I (identidad estricta)), cada signo de relación en la última línea coincide con el signo de la conversa de esa relación. La siguiente tabla muestra la conexión entre esas relaciones y las representadas en el primer diagrama (p. 78):



1. $C_1 = \mathbf{Dj} \cup \mathbf{Dj}^{-1}$
2. $C_2 = \mathbf{A} \cup \mathbf{A}^{-1}$
3. = o **I** (ésta no fue numerada en el primer diagrama)
4. $C_3 = \mathbf{O} \cup \mathbf{O}^{-1}$
5. $C_4 = \mathbf{Ci} \cup \mathbf{Ci}^{-1}$
6. $C_5 = \mathbf{Ct} \cup \mathbf{Ct}^{-1}$
7. $C_6 = \mathbf{Cm} \cup \mathbf{Cm}^{-1}$

El signo '∪' es el signo de la *suma* de dos clases o (como en este caso) dos relaciones. Así cada una de las relaciones C es la suma de una relación y su conversa. Las relaciones de la derecha son todas asimétricas (porque **T** es asimétrica), mientras que sus sumas son simétricas (véase más abajo).

Daremos ahora definiciones estrictas de estas relaciones.

[D.4] Un bionte x *se adjunta a* un bionte y si y sólo si x es cobióntico con y, y el fin de x está en P o su conversa con el comienzo de y.

$$\mathbf{A} = \widehat{x}\widehat{y}\{x\ \mathbf{Cob}\ y\ \&\ \mathbf{E}(x)\mathbf{P} \mid \breve{\mathbf{P}}\ \mathbf{B}(y)\}.$$

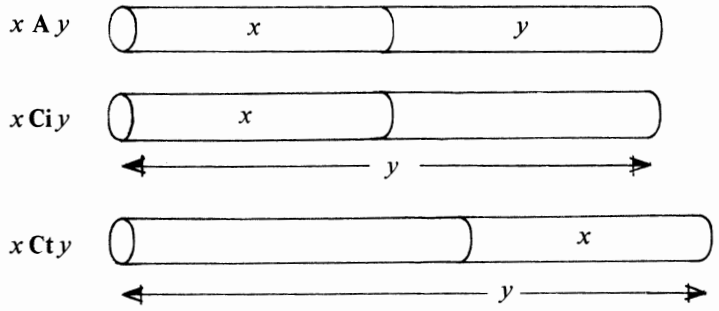
[D.5] Un bionte x está *inicialmente contenido* en un bionte y si y sólo si x **Cob** y, y el comienzo de x es idéntico con el comienzo de y, pero el fin de x precede al de y en el tiempo.

$$\mathbf{Ci} = \widehat{x}\widehat{y}\{x\ \mathbf{Cob}\ y\ \&\ \mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(y)\ \&\ \mathbf{E}(x)\ \mathbf{Z}\ \mathbf{E}(y)\}.$$

[D.6] Un bionte x está *terminalmente contenido* en un bionte y si y sólo si x **Cob** y, y el fin de x es idéntico al fin de y, y el comienzo de y precede al de x en el tiempo.

$$\mathbf{Ct} = \widehat{x}\widehat{y}\{x\ \mathbf{Cob}\ y\ \&\ \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(y)\ \&\ \mathbf{B}(y)\ \mathbf{Z}\ \mathbf{B}(x)\}.$$

Estas tres relaciones pueden ser representadas en diagramas del siguiente modo.



Las tres relaciones restantes pueden ser definidas como *productos relativos* de las ya consideradas. Si R y S son relaciones cualesquiera de dos términos, el producto relativo de ellas se escribe $R \mid S$ o $S \mid R$, según el orden en que se las tome. Un término x está en $R \mid S$ con un término y si y sólo si hay un término intermedio z tal que xRz y zSy. Un ejemplo familiar es la relación de *tío*, que es el producto relativo de hermano y padre, puesto que si x es hermano de z y z es padre de y, entonces x es tío de y.

[D.7] Un bionte x es *disjunto de* un bionte y si y sólo si x es cobióntico con y, y hay un bionte z tal que x se adjunta a z y z se adjunta a y.

$$\mathbf{Dj} = \mathbf{A} \mid \mathbf{A}. \quad (\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \text{ puede escribirse también } \mathbf{A}^2).$$

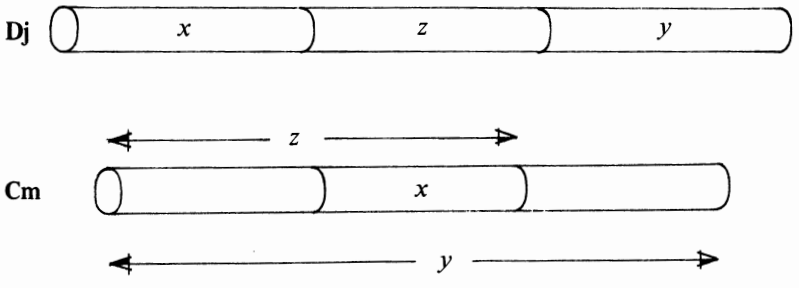
[D.8] Un bionte x está *medialmente contenido* en un bionte y si y sólo si hay un bionte z tal que x está terminalmente contenido en z y z está inicialmente contenido en y.

$$\mathbf{Cm} = \mathbf{Ct} \mid \mathbf{Ci}.$$

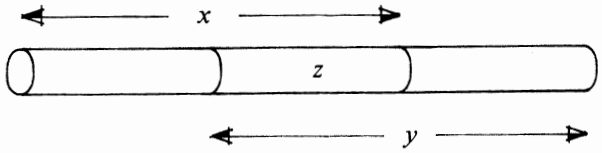
[D.9] Un bionte x *se superpone a* un bionte y si y sólo si x es cobióntico con y, y hay un bionte z tal que x está en la conversa de **Ct** con z y z está inicialmente contenido en y.

$$\mathbf{O} = \mathbf{Ct}^{-1}\,\mathbf{Ci}.$$

Estas relaciones están representadas en los siguientes diagramas:



(Obsérvese que hay también un bionte w tal que $x\mathbf{Ci}w$ y $w\mathbf{Ct}y$, de forma que $\mathbf{Ct}|\mathbf{Ci} = \mathbf{Ci}|\mathbf{Ct}$).



Por definición, si un bionte se encuentra con otro bionte en una de las relaciones: **A**, **Ci**, **Ct**, **Dj**, **O**, **Cm**, entonces ambos son cobiónticos; y nuestra consideración de las relaciones de tiempo entre comienzos y fines muestra que si dos biontes son cobiónticos, pero no idénticos, entonces han de guardar entre sí una de las seis relaciones arriba indicadas.

Probaremos ahora que la relación cobióntica es simétrica y transitiva. Para probar que es simétrica hemos de mostrar que siempre que se tenga $x\mathbf{Cob}y$, se tiene también $y\mathbf{Cob}x$.

Prueba: Por definición tenemos que $x\mathbf{Cob}y$ cuando

$$\mathbf{bc}(x, y) \neq \Lambda \quad \text{(por D.1)}$$

y este es el caso cuando x e y son biontes y hay un bionte z tal que $x\mathbf{P}z$ e $y\mathbf{P}z$. Pero si tenemos $x\mathbf{P}z$ e $y\mathbf{P}z$, tenemos también $y\mathbf{P}z$ y $x\mathbf{P}z$; de este modo

$$\mathbf{bc}(y, x) \neq \Lambda$$

e

$$y\mathbf{Cob}x.$$

A continuación hemos de probar que

si $x\mathbf{Cob}y$ e $y\mathbf{Cob}z$, entonces $x\mathbf{Cob}z$, para todo x, y, y z.

Prueba: Si $x\mathbf{Cob}y$, entonces, por D.1 y D.3, hay un bionte u tal que $x\mathbf{P}u$ e $y\mathbf{P}u$; y si $y\mathbf{Cob}z$, entonces hay un bionte v tal que $y\mathbf{P}v$ y $z\mathbf{P}v$. Pero si $y\mathbf{P}u$ e $y\mathbf{P}v$, entonces habrá, por el Axioma 3, un bionte w tal que $u\mathbf{P}w$ y $v\mathbf{P}w$. Además, si $x\mathbf{P}u$ y $u\mathbf{P}w$ tenemos $x\mathbf{P}w$, y si $z\mathbf{P}w$ y $v\mathbf{P}w$ tenemos $z\mathbf{P}w$, dado que **P** es transitiva. Pero si $x\mathbf{P}w$ y $z\mathbf{P}w$ y x, z y w son biontes, entonces w $\mathbf{bc}(x, z)$; y si w $\mathbf{bc}(x, z)$ entonces $\mathbf{bc}(x, z) \neq \Lambda$ y así, por la definición D.3, $x\mathbf{Cob}z$.

Desde el punto de vista de sus productos relativos, las seis relaciones (excluyendo la identidad) entre biontes cobiónticos se agrupan en dos conjuntos: (i) {**Dj**, **A**, **O**} y (ii) {**Ci**, **Cm**, **Ct**}; conjuntos tales que si tomamos dos miembros cualesquiera de uno de ellos, el producto relativo de los mismos quedará incluido en un miembro del conjunto en cuestión o en la suma de tales miembros. La matriz adjunta muestra esta circunstancia, así como también el resultado a que da lugar la obtención del producto de dos de esas relaciones, cuando una de ellas está tomada de un conjunto y otra del otro. Si se elige una letra de la línea superior de esta matriz y otra de la columna izquierda, la letra que figure en la intersección de dichas filas y columna denota la relación en que está *incluido* el producto relativo en cuestión. Las sumas de las relaciones, S_1 y S_2, son:

	Dj	A	O	Ci	Cm	Ct
Dj	Dj	Dj	Dj	Dj	Dj	Dj
A	Dj	Dj	Dj	Dj	Dj	A
O	Dj	Dj	S_1	S_1	$S_1 \cup S_2$	S_2
Ci	Dj	A	O	Ci	Cm	Cm
Cm	$S_1 \cup S_2$	S_2	S_2	Cm	Cm	Cm
Ct	$S_1 \cup S_2$	S_2	S_2	Cm	Cm	Ct

$$S_1 = \text{Dj} \cup \text{A} \cup \text{O}$$
$$S_2 = \text{O} \cup \text{Ci} \cup \text{Cm}.$$

Esto significa que si $x S_1 y$, entonces o x **Dj** y o x **A** y o x **O** y; y si $x S_2 y$, entonces o x **O** y o x **Ci** y o x **Cm** y.

En la Parte I se discutieron algunos de los diversos sentidos del término identidad. La explicación de uno de ellos se dejó para la presente Parte II, y este es el momento de efectuarla. Cuando un biólogo declara que ha repetido un experimento sobre el mismo animal, lo que debe entenderse con ello es que el experimento ha sido realizado sobre dos biontes cobiónticos.

La noción de bionte ayuda asimismo a elucidar el siguiente problema. En sus *Mendel's Principles of Heredity* (1909, p. 275), W. Bateson escribió:

> El descubrimiento de un criterio verdaderamente delimitativo de las propiedades y atributos de los individuos, que los distinguiese de las partes, constituiría un gran avance en la teoría biológica.

En un sentido, al menos, de la palabra: 'individuo', podemos decir que los biontes son individuos, y que aquellas partes de los biontes que no son ellas mismas biontes *no* son individuos. Por tanto: los biontes pueden bastarse a sí mismos; no así las partes que no son biontes.

Definimos al *mínimo bionte continente* de biontes x e y —en símbolos **sbc** (x, y)— como aquel miembro de **bc** (x, y) cuyo comienzo es el comienzo de x y cuyo fin es el fin de y, *o*: cuyo comienzo es el comienzo de y y cuyo fin es el fin de x.

[D.10] $\mathbf{sbc}(x, y) = z :\equiv : z \in \mathbf{bc}(x, y) : \mathbf{B}(z) = \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{E}(z) = \mathbf{E}(y)$ o

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}(y) \cdot \mathbf{E}(z) = \mathbf{E}(x).$$

Teorema: Si $x\mathbf{Cob}y$, entonces existe un bionte z tal que $z = \mathbf{scb}(x, y)$.

Prueba: Por definición, si $x\mathbf{Cob}y$, entonces $\mathbf{bc}(x, y) \neq \Lambda$, y así hay un bionte w tal que $x\mathbf{P}w$ e $y\mathbf{P}w$; y puesto que $x\mathbf{P}w$, tenemos que $\mathbf{B}(x)\mathbf{S1}w$ (es una lámina temporal de w), y similarmente, puesto que $y\mathbf{P}w$, tenemos $\mathbf{E}(y)\mathbf{S1}w$. Ahora bien, si $\mathbf{B}(x)\,\mathbf{Z}\,\mathbf{E}(y)$, habrá, por el Axioma 4, un bionte z que tenga a $\mathbf{B}(x)$ por comienzo y a $\mathbf{E}(y)$ por fin. De este modo z satisface la expuesta definición de mínimo bionte continente de x e y. Por otra parte, será el *único* bionte que satisfaga la definición. Pues supóngase, a este respecto, un bionte z' que la satisfaga; entonces tendremos:

$$\mathbf{B}(z') = \mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(z), \text{ de donde } \mathbf{B}(z') = \mathbf{B}(z), \text{ y}$$

$$\mathbf{E}(z') = \mathbf{E}(y) = \mathbf{E}(z), \text{ de donde } \mathbf{E}(z') = \mathbf{E}(z),$$

con un resultado similar si $\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}(y)$ y $\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}(x)$. Pero de $\mathbf{B}(z') = \mathbf{B}(z)$ y $\mathbf{E}(z') = \mathbf{E}(z)$ obtenemos (por T.1 y de acuerdo con los axiomas para biontes)

$$z = z'.$$

Ahora podemos definir la *suma* de dos biontes x e y como el mínimo bionte continente de x e y, *supuesto que toda* lámina temporal del mínimo bionte continente de x e y sea una parte propia de x o una parte propia de y.

[D.11] $z = (x + y)$ si y sólo si: $z = \mathbf{sbc}(x, y)$ y para todo u, si $u\mathbf{S1}z$ entonces $u\mathbf{Pp}x$ o $u\mathbf{Pp}y$.

Pero si $x\mathbf{Dj}y$, no habrá suma de x e y, puesto que habrá un bionte cuyo comienzo esté en $\mathbf{P}|\breve{\mathbf{P}}$ con el fin de x, y cuyo fin esté en $\mathbf{P}|\breve{\mathbf{P}}$ con el comienzo de y, mientras que ninguna otra lámina de tiempo de este bionte será una parte de x o de y. En cambio, si x está con respecto a y en cualquier otra de las cinco restantes relaciones cobiónticas —**A**, **O**, **Ci**, **Cm**, o **Ct**, entonces habrá un bionte z tal que $z = (x + y)$.

El *máximo bionte contenido* por x e y —en símbolos, $\mathbf{gcb}(x, y)$— es el bionte z tal que z es un miembro de $\mathbf{cb}(x, y)$ y todo miembro de $\mathbf{cb}(x, y)$ es una parte de z. Es también conveniente denotar a este bionte por '$x \cdot y$' y llamarlo el *producto* de x e y.

[D.12] $\mathbf{gcb}(x, y) = z$ si y sólo si $z \in \mathbf{cb}(x, y)$ y para todo u, si $u \in \mathbf{cb}(x, y)$, entonces $u\mathbf{P}z$.

[D.12a] $x \cdot y = z$ si y sólo si $z = \mathbf{gcb}(x, y)$.

Es fácil probar que sólo puede haber un $\mathbf{gcb}(x, y)$; puesto que si z y z' satisfacen la definición, hemos de tener $z\mathbf{P}z'$ y $z'\mathbf{P}z$, de donde se sigue (como vimos en § 1) que $z = z'$. Ahora bien, como muestra el sistema ramificado de alternativas expuesto en la página 80, si $\mathbf{cb}(x, y) = \Lambda$, uno de los dos biontes x e y

estará en **Dj** o en **A** con el otro. Consiguientemente, no habrá producto de x e y cuando se den estas relaciones. Mas para todas las restantes relaciones entre biontes cobiónticos existirán tanto el producto como la suma. La suma existe también cuando $x\mathbf{A}y$, y cuando $x\mathbf{A}y$, el mínimo bionte continente de x e y, es asimismo la suma de x e y.

A continuación sigue una serie de teoremas que conciernen a biontes continentes de biontes y a biontes contenidos. El signo E!( ) significa que el objeto denotado por el signo que figura entre los paréntesis existe, es decir, que hay uno y sólo un objeto de esa índole.

[T.1] Si x e y son biontes, entonces $\mathbf{bc}(x, y) = \mathbf{bc}(y, x)$.

[T.2] Si x e y son biontes, entonces $\mathbf{cb}(x, y) = \mathbf{cb}(y, x)$.

[T.3] Si $u \in \mathbf{bc}(x, y)$ y $v \in \mathbf{bc}(y, z)$, entonces $y \in \mathbf{cb}(u, v)$.

[T.4] Si $z \in \mathbf{cb}(x, y)$ y $u \in \mathbf{bc}(x, y)$, entonces $z\mathbf{P}u$.

[T.5] Si $\mathbf{cb}(x, y) \neq \Lambda$, entonces $\mathbf{bc}(x, y) \neq \Lambda$.

[T.6] Si $x\mathbf{Dj}y$, entonces E! $\mathbf{sbc}(x, y)$.

[T.7] Si $x\mathbf{A}y$, entonces E! $(x + y) \cdot \exists$ E! $(x \cdot y)$.

[T.8] Si $x\mathbf{A}y$, entonces $\mathbf{sbc}(x, y) = (x + y)$.

[T.9] Si $x\mathbf{A}y$, entonces $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(x + y)$ y $E(y) = \mathbf{E}(x + y)$.

[T.10] Si $x\mathbf{A}y$, entonces $x\mathbf{Pp}(x + y)$ e $y\mathbf{Pp}(x + y)$.

[T.11] Si $x\mathbf{A}y$, entonces $x\mathbf{Ci}(x + y)$ e $y\mathbf{Ct}(x + y)$.

[T.12] $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Ci} \mid \mathbf{Ct}^{-1}$ (por T.11).

[T.13] Si $x\mathbf{Ci} \cup \mathbf{Cm} \cup \mathbf{Ct}y$, entonces $x = (x \cdot y)$ e $y = (x + y)$.

[T.14] Si $x\mathbf{Ci}y$, entonces $(x \cdot y)\mathbf{Ci}(x + y)$ (por T.13).

[T.15] Si $x\mathbf{O}y$ $(x \cdot y)\,\mathbf{Cm}(x + y)$.

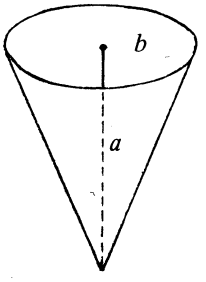
[T.16] Si $x\mathbf{Cm}y$, entonces $(x \cdot y)\,\mathbf{Cm}(x + y)$.

[T.17] Si $x\mathbf{Ct}y$, entonces $(x \cdot y)\,\mathbf{Ct}(x + y)$.

[T.18] Si x, y, z son biontes, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.

§ 5. *Ambientes.*

El sentido en que se usa aquí la noción de ambiente se explicará con ayuda del adjunto diagrama de Minkowski. Se trata de un diagrama de espacio-tiempo representado en tres dimensiones. La elipse *b* representa una esfera cuyo diámetro en años luz es igual a la longitud en años de la línea *a*. En *b* se contienen, por tanto, todos los objetos a partir de los cuales pudiera un rayo de luz



alcanzar a *a* antes de que termine. En la presente aplicación, *a* puede representar un bionte, o una célula o un gameto. Por el ambiente de *a* entenderemos la suma (en el sentido explicado en § 2) del conjunto de todos los objetos que se encuentran dentro de la superficie de la esfera *b*. Dicho conjunto incluirá, por tanto, todos los objetos físicos que pueden producir un efecto sobre *a*. Introducimos la noción de ambiente por medio de un signo de relación no definido: **En**. De este modo $x\mathbf{En}y$ significa: x es el ambiente de y, donde y puede ser un bionte, una parte propia extensa en el tiempo de un bionte, o un gameto.

El principal axioma que gobierna el uso de este signo es el siguiente:

[A.1] $$\mathbf{En} \in 1 \rightarrow 1,$$

esto es, la relación ambiental es una relación de uno-a-uno. Ello significa que para todo x, y y z, si $x\mathbf{En}z$ e $y\mathbf{En}z$, entonces $x = y$; y si $x\mathbf{En}y$ y $x\mathbf{En}z$, entonces $y = z$.

Otro importante axioma es:

[A.2] Si x es un *bionte*, entonces existe un y tal que $y\mathbf{En}x$.

Y de A.1 y A.2 se sigue que puede haber uno y sólo un tal y. Ello puede expresarse escribiendo:

Si x es un *bionte*, entonces E! $\mathbf{En}(x)$.

Aquí no se utiliza '**En**' como un signo de relación, sino como un funtor de designación, que nombra al único ambiente de x. Resultará obvio que aun cuando podamos quitar la corteza a una naranja y arrancar la piel a un conejo, es imposible remover el ambiente de un bionte; ambos se encuentran, desde el comienzo, inseparablemente conectados. No obstante es fácil (según veremos) hacer abstracción de los ambientes y olvidarse de ellos.

[A.3] Si dos biontes cualesquiera x e y tienen el mismo comienzo y x es una parte propia de y, entonces el ambiente de x es una parte propia del ambiente de y.

A continuación definiremos una *relación entre ambientes* cuando los biontes concernientes son cobiónticos. Diremos que un ambiente u es una *proyección* de un ambiente v si y sólo si existen biontes x e y tales que $u\mathbf{En}x$ y $v\mathbf{En}y$ e $y\mathbf{Ct}x$.

[D.1] $$\mathbf{Prj} = \widehat{u}\,\widehat{v}\{(\exists x, y)u\mathbf{En}x \text{ y } v\mathbf{En}y \text{ e } y\mathbf{Ct}x\}.$$

Los teoremas expuestos a continuación se siguen con facilidad de las definiciones concernientes.

[T.1] Si $x\mathbf{Dj}y$, entonces $\mathbf{En}(\mathbf{sbc}(x, y))\,\mathbf{Prj}\,\mathbf{En}(y)$ y $\mathbf{En}(x)\,\mathbf{Pp}\,\mathbf{En}(\mathbf{sbc}(x, y))$.

[T.2] Si $x\mathbf{A}y$, entonces $\mathbf{En}(x+y)\,\mathbf{Prj}\,\mathbf{En}(y)$ y $\mathbf{En}(x)\,\mathbf{Pp}\,\mathbf{En}(x+y)$.

[T.3] Si $x\mathbf{O}y$, entonces $\mathbf{En}(x+y)\,\mathbf{Prj}\,\mathbf{En}(y)$ y $\mathbf{En}(x)\,\mathbf{Pp}\,\mathbf{En}(x+y)$.

[T.4] Si $x\mathbf{Ci}y$, entonces $\mathbf{En}(x)\,\mathbf{Pp}\,\mathbf{En}(y)$.

[T.5] Si $x\mathbf{Cm}y$, entonces existe un u tal que $u\mathbf{Prj}\,\mathbf{En}(x)$ y $u\mathbf{Pp}\,\mathbf{En}(y)$.

[T.6] Si $x\mathbf{Ct}y$, entonces $\mathbf{En}(y)\,\mathbf{Prj}\,\mathbf{En}(x)$.

Los biontes cobiónticos, juntamente con sus ambientes, constituyen el objeto de las ramas de la biología denominadas embriología, fisiología y ecología. En la siguiente sección pasamos a considerar relaciones entre biontes *no* cobiónticos, que son de especial importancia en genética.

§ 6. *La relación parental.*

La relación parental es muy complicada. En todas sus variedades es una relación entre biontes acobiónticos, es decir, aquellos que *no* son cobiónticos, y ello por la siguiente razón. Dijimos al comenzar que un bionte desarrolla una *trama* temporal. Dos biontes cobiónticos desarrollarán, por tanto, *partes* de la trama a menos que uno de ellos sea un bionte *completo* y desarrolle la totalidad de la trama, mientras el otro, que es cobióntico con él, sea sólo una parte *propia* suya. En este último caso el que es una parte propia desarrollará parte de la trama. Pero merced a la relación parental* tiene lugar la reproducción, en donde el vástago ha de desarrollar, cuando menos, el comienzo de la trama que fue desarrollada por el padre o padres. Admitiremos dos subdivisiones principales de la relación parental: **Pa** o parentesco asexual, y **Ps** o parentesco sexual. A su vez dividimos a **Pa** en dos: **Pd** o parentesco por división, y **Pg** o parentesco por gemación o brote.

Antes de proceder a la definición de **Pd**, hemos de definir lo que sea un bionte *completo*. Lo cual no es cosa que podamos hacer en términos de trama desarrollada, puesto que no admitimos la noción, más bien oscura y complicada, de trama en el sistema formal. Por esta razón definiremos a un bionte completo como uno que no es parte propia de otro bionte distinto de él; la definición formal es como sigue:

[D.1] $\mathbf{comp} = \widehat{x}\{x \in \mathbf{bionte}\ \text{y}\ \sim(\exists y)(y \in \mathbf{bionte}\ \text{y}\ x\mathbf{Pp}y)\}$.

Ello será suficiente para el presente propósito; más tarde se darán ulteriores razones de su introducción.

Definimos ahora a **Pd**, o parentesco por división, como una relación en la que se encuentra un bionte completo x con un bionte completo y si y sólo si

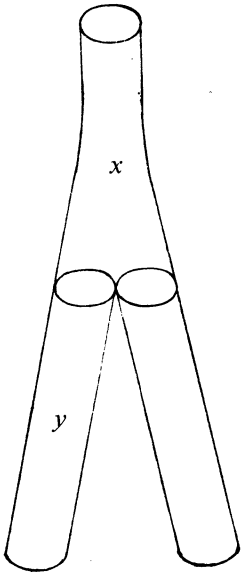
---

* Por relación "parental" o "parentesco" se entiende aquí exclusivamente, como advertirá el lector, la relación de paternidad sin especificación de sexo. (T.)

existe un conjunto X de comienzos de biontes, cuya suma es el fin de x, y el comienzo de y es un miembro de X, y x *no* es cobióntico con y.

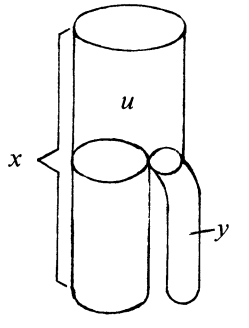
[D.2] $\mathbf{Pd} = \hat{x}\hat{y}\{x,y \in \mathbf{comp} \cdot \sim(x\,\mathbf{Cob}\,y) \cdot (\exists X) \cdot X \subseteq \mathrm{B}''\,\mathbf{comp} \cdot \mathrm{S}(x) = \mathbf{E}(x) \cdot \mathbf{B}(y) \in X\}$.

(Aquí '$\subseteq$' es el signo de inclusión entre conjuntos, y '**B″ comp**' denota el conjunto de todos los comienzos de los miembros del conjunto de todos los biontes completos). Usualmente la división da lugar a dos vástagos, pero la expuesta definición no la limita a dos.



El adjunto diagrama ilustra el modo según el cual el fin del padre se constituye por la suma de los comienzos de los vástagos. Ello ilustra también otro punto. Si adoptamos el axioma concerniente a la relación T, conforme al cual si u y v son momentáneos y $u\mathbf{Z}y$ entonces hay un objeto momentáneo z tal que $u\mathbf{Z}z$ y $z\mathbf{Z}y$, nos vemos forzados a admitir una infinidad de momentos entre u y v. Esto nos llevaría a la siguiente consecuencia: que si x es un bionte, entonces x ha contenido inicialmente una infinidad de biontes. Por tal razón hemos limitado nuestra relación **Pd** a biontes completos; de otro modo el bionte y de nuestra definición representaría una infinidad de biontes, todos los cuales serían vástagos de x por **Pd**.

Con ayuda del Axioma 2 y las definiciones envueltas podemos probar que **Pd** es una relación de uno-a-muchos. Porque si tenemos $x\mathbf{Pd}y$ y $z\mathbf{Pd}y$, entonces, por definición, el comienzo de y será una parte del fin de x y asimismo del fin de z. Consiguientemente, x y z serán biontes cuyos fines tienen una parte en común, de forma que, por el Axioma 2, $x\mathbf{P}z$ o $z\mathbf{P}x$. Pero, de nuevo por la definición de **Pd**, x y z son ambos biontes completos, de suerte que, por D.1 de la presente sección, ninguno de ellos puede ser una parte propia del otro, y así tenemos que $x = z$ y **Pd** es de uno-a-muchos.



Por el momento, dejamos ahora **Pd** y volvemos nuestra atención al otro tipo de parentesco asexual, a saber **Pg** o parentesco por brote. En este caso tenemos un bionte completo x que se encuentra en la relación **Pg** con un brote y, el cual es un bionte completo si y sólo si existe un bionte u que está inicialmente contenido en x, y el comienzo de y es una parte propia del fin de u, y u no es cobióntico con y. Hemos de tratar, por tanto, en primera instancia de una relación de tres términos: designémosla con el símbolo **Pgg**.

[D.3] $\mathbf{Pgg} = \hat{x}\hat{u}\hat{y}\{x \in \mathbf{Comp} \cdot u\,\mathbf{Ci}\,x \cdot \sim(x\,\mathbf{Cob}\,y) \cdot \sim(u\,\mathbf{Cob}\,y) \cdot \mathbf{B}(y)\,\mathbf{Pp}\,\mathbf{E}(u)\}$.

Ahora podemos definir como sigue la relación de dos términos **Pg** entre biontes completos x e y:

[D.3a] $\mathbf{Pg} = \widehat{x}\,\widehat{y}\{x \text{ e } y \text{ son biontes completos y existe un } u \text{ tal que } \mathbf{Pgg}(xuy)\}$.

Esta relación es, al igual que **Pd**, asimétrica (puesto que si tenemos $x\mathbf{Pg}y$, no podemos tener $y\mathbf{Pg}x$) y de uno a muchos.

Pasamos a considerar ahora la relación de parentesco sexual, que es extremadamente complicada. En el parentesco asexual el comienzo del vástago es parte propia de una lámina temporal del padre, pero con el parentesco sexual no es este el caso. Estrictamente hablando, en el parentesco sexual, padre y vástago no tienen parte en común, sino que el lazo que los vincula es una célula, denominada gameto, que no es un bionte ni parte propia de un bionte, pero cuyo comienzo es parte propia de una lámina temporal del padre y cuyo fin es parte propia del comienzo del vástago. Nos las habemos, pues, con un doble producto relativo —el producto de la relación de productor y la relación de fusión o unión, según se explicará acto seguido.

La relación de productor se asemeja a la relación **Pg**, a excepción de la circunstancia de que el producto es un gameto en lugar de un bionte. Decimos que un bionte completo x produce al gameto z del bionte u si y sólo si u está inicialmente contenido en x y el comienzo de z es parte propia del fin de u.

[D.4] $\mathbf{Prd} = \widehat{x}\,\widehat{u}\,\widehat{z}\{x \in \mathbf{Comp} \cdot u\mathbf{Ci}x \cdot \mathbf{B}(z)\mathbf{Pp}\,\mathbf{E}(u) \cdot z \in \text{gameto}\}$.

La relación de fusión o unión es una relación de tres términos entre un gameto masculino, un gameto femenino y un bionte completo definido a la manera que sigue, utilizando '♂' para denotar el conjunto de los gametos masculinos y '♀' para denotar el de los femeninos.

Decimos que la relación de unión se da entre un gameto masculino x, un gameto femenino y y un bionte completo z, si y sólo si la suma del conjunto compuesto por los dos miembros: $\mathbf{E}(x)$, $\mathbf{E}(y)$ es idéntica al comienzo de z.

[D.5] $\mathbf{U} = \widehat{x}\,\widehat{y}\,\widehat{z}\{x \in ♂ \text{ e } y \in ♀ \text{ y } z \in \mathbf{Comp} \text{ y } \Sigma\{\mathbf{E}(x), \mathbf{E}(y)\} = \mathbf{B}(z)\}$.

Obsérvese que el sexo del gameto queda indicado por el orden de las letras, de suerte que, con ayuda de D.5 tenemos:

[T.1] Para todo x, y, z: si $\mathbf{U}(xyz)$, entonces $x \in ♂$ e $y \in ♀$.

Podemos definir ahora al padre masculino como sigue: x es padre masculino de w si y sólo si tenemos un u y un z tales que $\mathbf{Prd}(xuz)$ y un y tal que $\mathbf{U}(zyw)$.

[D.6] $\mathbf{Pm} = \widehat{x}\,\widehat{w}\{(\exists u, z, y): \mathbf{Prd}(xuz) \cdot \mathbf{U}(zyw)\}$.

Similarmente, x es padre femenino de w si y sólo si tenemos un u, un z, y un y tales que $\mathbf{Prd}(xuz) \cdot \mathbf{U}(yzw)$.

[D.7] $\mathbf{Pf} = \widehat{x}\,\widehat{w}\{(\exists u, z, y) \cdot \mathbf{Prd}(xuz) \cdot \mathbf{U}(yzw)\}$.

La relación de parentesco hermafrodita (en que un padre produce ambos gametos) puede ser definida como sigue:

[D.8] $\mathbf{Ph} = \widehat{x}\,\widehat{w}\,\{(\exists u, v, z, y) \cdot \mathbf{Prd}(xuz) \cdot \mathbf{Prd}(xvy) \cdot \mathbf{U}(zyw)\}.$

Para concluir esta sección se dirán unas palabras sobre ambientes y relaciones parentales. Cuando tenemos $x\mathbf{Pd}y$ y $x\mathbf{Pd}z$ e $y \neq z$, los ambientes de y y z no serán idénticos, pero tendrán muchas partes en común. En el parentesco por gemación la situación puede ser muy diferente. Supóngase que tenemos $\mathbf{Pgg}(xuy)$ y $\mathbf{Pgg}(xvz)$ con $u\mathbf{Ci}v$; entonces el ambiente de u será sólo una parte del ambiente de v. Consiguientemente, una diversidad entre los vástagos en cuestión, a saber y y z (o gametos en el caso de producción de los mismos), puede ser una consecuencia de la diversidad ambiental.

Un resultado un tanto sorprendente se sigue de las anteriores consideraciones, el cual es, a saber, que hay vástagos que jamás han nacido ni muerto y vástagos que han nacido de padres femeninos pero que no son vástagos de tales padres. Esto sucede en el caso de gemelos idénticos, en donde tenemos los padres x e y y un vástago z tal que $x\mathbf{Pf}z$ e $y\mathbf{Pm}z$. Pero luego tenemos los dos gemelos u y v tales que $z\mathbf{Pd}u$ y $z\mathbf{Pd}v$. De este modo z es un padre por **Pd** y termina sin haber nacido; y x *no* es padre femenino de u y v, sino que está en el producto relativo $\mathbf{Pf}|\mathbf{Pd}$ con respecto a ambos. Esta *no* es la ordinaria relación de abuelo, sino una especial para la que el lenguaje ordinario no tiene nombre.

CAPITULO IV: *BOSQUEJO DE UN SISTEMA DE* **Pd**-*GENETICA.*

§ 1.

Construiremos ahora un sistema en el cual serán tres en número las principales nociones no definidas. En primer lugar tenemos la relación **Pd**, que se da entre biontes cuando uno es padre del otro por división. La segunda es la relación **En**, que se da entre un ambiente y el bionte *del cual* es ambiente. La tercera noción no definida es el conjunto de familias de fenotipos (en forma abreviada **phenfam**), que es un conjunto de conjuntos y por tal razón no será discutida hasta tanto hayamos dicho más sobre individuos. Dirigimos, pues, nuestra atención ahora a los axiomas que gobiernan **Pd** y **En**.

[A.1] **Pd** es asimétrica.

Esto significa que para todo x e y, si $x\mathbf{Pd}y$, entonces *no* tenemos que $y\mathbf{Pd}x$.

[A.2] **Pd** es $1 \rightarrow$ cls.

Este axioma establece que **Pd** es una relación de uno-a-muchos, es decir: para todo x, y, y z, si $x\mathbf{Pd}z$ e $y\mathbf{Pd}z$, entonces $x = y$. Ello es otro modo de decir que un bionte sólo puede tener un padre por división. A partir de estos dos primeros axiomas podemos probar nuestro primer teorema:

[T.1] **Pd** es intransitiva.

Esto quiere decir que si tenemos que para todo x, y, y z: $x\mathbf{Pd}y$ e $y\mathbf{Pd}z$, entonces *no* tenemos que $x\mathbf{Pd}z$. Ello es obvio, puesto que si se tiene $y\mathbf{Pd}z$ y $x\mathbf{Pd}z$, es preciso (por A.2) que se tenga $x = y$; y si se tiene $x\mathbf{Pd}y$ y $x = y$, entonces es preciso tener también que $y\mathbf{Pd}x$, lo que es contrario a A.1.

[A.3] $(x)(y): x\mathbf{Pd}y \cdot \supset \cdot (\exists z) \cdot x\mathbf{Pd}z \;\&\; z \neq y.$

Este axioma afirma que para todo x e y: si $x\mathbf{Pd}y$, entonces hay un z tal que $x\mathbf{Pd}z$ y z es distinto de y. En otras palabras, en todo acto de reproducción por división tiene que haber cuando menos dos vástagos. Ello es tan obvio que puede pensarse que sea innecesario mencionarlo; pero en el método axiomático no hay nada que pueda darse por ya establecido: todo aquello que sea relevante ha de ser explícitamente declarado.

Para la relación ambiental tenemos otros tres axiomas:

[A.4] $\mathbf{En}$ es $1 \rightarrow 1$.

Esta expresión afirma que **En** es una relación de uno-a-uno, lo cual significa que no sólo es, como **Pd**, de uno-a-muchos, sino también de muchos-a-uno. Una relación es de muchos-a-uno si un objeto puede estar en esa relación solamente respecto de un objeto. De este modo, si tenemos que $x\,\mathbf{En}y$ y $x\,\mathbf{En}z$, entonces es preciso que tengamos que $y = z$. En otras palabras, un bionte puede tener solamente un ambiente, y un ambiente puede ser ambiente sólo de un bionte.

[A.5] $$\breve{C}'\mathbf{Pd} \subseteq \breve{D}'\mathbf{En}.$$

Este axioma establece que el campo de la relación **Pd** está incluido en el dominio converso de la relación **En**. Por el dominio de una relación R (escrito $D'R$) se entiende el conjunto de todos los objetos que están con algo en esa relación; por el dominio converso de R (escrito $\breve{D}'R$) se entiende el conjunto de todos los objetos *con respecto* a los cuales algo está en R. Por el campo de R (escrito $C'R$) se entiende la suma del dominio y el dominio converso de R. Así el campo de **Pd** será el conjunto de todos los objetos que son o padres por división o vástagos de tales padres. Este axioma establece, por tanto, que todo lo que es padre o vástago por división tiene un ambiente.

[A.6] $$D'\mathbf{En} \cap \breve{D}'\mathbf{En} = \Lambda.$$

Aquí se establece que el dominio y el dominio converso de la relación ambiental no tienen miembro en común. Ello es obvio por el sentido en que estamos usando la noción de ambiente. Si $x\,\mathbf{En}y$, entonces x es un objeto momentáneo, esférico, contemporáneo con el comienzo de y, y poseyendo un radio lo suficientemente largo para permitir que un rayo de luz que comience en cualquier parte de x alcance a y antes de su fin. Siendo todo ambiente un objeto momentáneo, y siendo todo bionte un objeto extenso en el tiempo, el conjunto de los ambientes y el conjunto de los biontes no pueden tener un miembro en común, aun cuando un bionte puede entrar en *intersección* con un ambiente.

Los restantes axiomas del sistema envuelven todos familias de fenotipos, y por tanto conjuntos de biontes y conjuntos de tales conjuntos. Antes de ocuparnos de éstos, continuaremos un poco más a nivel individual y consideraremos algunas de las consecuencias de los axiomas mencionados hasta el presente y algunas de las definiciones que pueden formularse en este estadio. Por vía de ejemplo puede probarse el siguiente teorema:

$$(x)\,(y)\colon x\,\mathbf{Pd}y \cdot \supset \cdot (\exists z, v, w) \cdot x\,\mathbf{Pd}z \cdot z \neq y \cdot v\,\mathbf{En}y \cdot w\,\mathbf{En}z \cdot v \neq w.$$

Esta expresión afirma que para todo x e y, si x es padre por división de y, entonces hay un z distinto de y tal que $x\,\mathbf{Pd}z$, y existen también un v y un w tales que v es el ambiente de y y es distinto de w, que es el ambiente de z. Ello se sigue fácilmente partiendo del Axioma 3 y teniendo en cuenta luego los Axiomas 5 y 4.

Definimos ahora una relación triádica que desempeña un importante papel en lo que sigue ulteriormente:

[D.1.0] $\mathbf{Off} = \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}(x\mathbf{Pd}z \text{ e } y\mathbf{En}z).$

En esta definición se establece que **Off** denota la relación en que se encuentran recíprocamente tres términos –*x*, *y*, y *z* (en este orden)– si y sólo si *z* es el vástago por división de *x*, e *y* es su ambiente. Una consecuencia inmediata de esta definición es que cuando dicha relación se da entre tres términos cualesquiera, éstos han de ser distintos entre sí:

[T.1.02] $(x)(y)(z)\colon \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot \supset \cdot x \neq y \text{ y } x \neq z \text{ e } y \neq z.$

Partiendo de la definición y del Axioma 2 obtenemos $x \neq z$, y a partir de la definición y de los Axiomas 5 y 6 obtenemos $y \neq z$ y $x \neq y$.

Los dos teoremas que vienen a continuación muestran que si en dos ocurrencias de esta relación son idénticos los últimos términos o los términos medios, entonces todos los términos correspondientes son idénticos:

[T.1.03] $(x)(y)(z)(w)(v)\colon \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot \mathbf{Off}(w, v, z) \cdot \supset \cdot x = w \cdot y = v.$

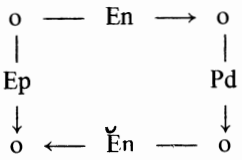
[T.1.04] $(x)(y)(z)(w)(v)\colon \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot \mathbf{Off}(w, v, z) \cdot \supset \cdot x = v \cdot z = v.$

Ambos teoremas se siguen de la definición y de los Axiomas 1 y 4.

Al presente estadio podemos, convenientemente, definir una relación a la que daremos el nombre de *relación de predecesor ambiental* y que corresponde a la relación **Pd** entre biontes. Esta relación suministra un ejemplo de lo que se denomina la transformación de una relación por otra. De hecho, es la transformación de la relación **Pd** por **En**, como muestra su definición:

[D.1.1] $\mathbf{Ep} = \mathbf{En}|\mathbf{Pd}|\ \mathbf{En}.$

Primero formamos el producto relativo de **En** con **Pd**, y luego el producto relativo de tal relación con la conversa de **En**. Ello se aclarará merced a la adjunta figura compuesta a base de flechas y representativa de las relaciones envueltas. La conexión entre **Ep** y **Off** queda ilustrada por el siguiente teorema:



Si $\mathbf{Off}(x, y, z)$ y $\mathbf{Off}(z, u, v)$, entonces $y\mathbf{Ep}u$,

que es tal porque de $\mathbf{Off}(x, y, z)$ obtenemos $y\mathbf{En}z$ por la definición D.1.0; y de $\mathbf{Off}(z, u, v)$ obtenemos $z\mathbf{Pd}v$ y $u\mathbf{En}v$ por la misma definición; pero si tenemos $u\mathbf{En}v$, tenemos también $v\check{\mathbf{E}}\mathbf{n}u$, resultando de este modo: $y\mathbf{En}z$ y $z\mathbf{Pd}v$ y $v\check{\mathbf{E}}\mathbf{n}u$, y así por D.1.1 tenemos $y\mathbf{Ep}u$.

Esta relación es como **Pd**, de uno-a-muchos, asimétrica e intransitiva.

Pasamos a considerar ahora otra relación triádica que difiere de **Off** por ser una relación entre un bionte y dos ambientes, en lugar de serlo entre dos biontes y un ambiente. Un conjunto *x*, *y*, *z*, en este orden, se denominará un *triplo genético* si y sólo si existen biontes *u* y *v* tales que $\mathbf{Off}(x, y, u)$ y $\mathbf{Off}(x, z, v)$ y $u \neq v$; con la ulterior condición de que no exista un bionte *w* tal que $x\mathbf{Pd}w$ y $w \neq u$, y $w \neq v$. Esta última condición tiene el efecto de restringir el concepto

en cuestión a instancias de división binaria. Esta relación la escribimos: **Gtp1**(x,y,z). La definición formal es como sigue:

[D.1.2] $\quad \mathbf{Gtp1} = \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}\,(\exists u, v)\colon \mathbf{Off}(x, y, u) \cdot \mathbf{Off}(x, z, v) \cdot u \neq v\colon$

$$: \sim (\exists w) \cdot x\,\mathbf{Pd}\,w \cdot w \neq u \cdot w \neq v.$$

Entre los teoremas que son fácilmente probables, a partir de las definiciones relevantes y con ayuda de los Axiomas 1 y 4, figuran los siguientes: en primer lugar, esta relación es simétrica en lo que respecta a su segundo y tercer término, de forma que tenemos:

$$\mathbf{Gtp1}\,(x, y, z) \equiv \mathbf{Gtp1}\,(x, z, y).$$

Si el primer término de un triplo genético es padre por división de un bionte w, entonces o y o z es el ambiente de w:

$$\text{Si } \mathbf{Gtp1}\,(x, y, z) \text{ y } x\,\mathbf{Pd}\,w, \text{ entonces } y\,\mathbf{En}\,w \text{ o } z\,\mathbf{En}\,w.$$

Similarmente, si tenemos dos triplos genéticos, **Gtp1** $(x, y\ z)$ y **Gtp1** (w, u, v) y $x\,\mathbf{Pd}\,w$, entonces o y o z es el predecesor ambiental de u; y si y es el predecesor ambiental de u, es también el predecesor ambiental de v:

$$\text{Si } \mathbf{Gtp1}\,(x, y, z) \text{ y } \mathbf{Gtp1}\,(w, u, v) \text{ y } x\,\mathbf{Pd}\,w, \text{ entonces } y\,\mathbf{Ep}\,u \cdot \text{o} \cdot z\,\mathbf{Ep}\,u.$$

$$\text{Si } \mathbf{Gtp1}\,(x, y, z) \text{ y } \mathbf{Gtp1}\,(w, u, v) \text{ e } y\,\mathbf{Ep}\,u, \text{ entonces } y\,\mathbf{Ep}\,v.$$

De este último teorema y la simetría de u y v podemos obtener:

$$\text{Si } \mathbf{Gtp1}\,(x, y, z) \text{ y } \mathbf{Gtp1}\,(w, u, v), \text{ entonces } y\,\mathbf{Ep}\,v \text{ si y sólo si } y\,\mathbf{Ep}\,u.$$

La siguiente expresión es también un teorema:

$$\text{Si } \mathbf{Gtp1}\,(x, y, z) \text{ y } \mathbf{Gtp1}\,(w, u, v), \text{ entonces } \mathbf{Off}\,(x,y,w) \text{ si y sólo si } y\,\mathbf{Ep}\,u.$$

Resta por introducir aquí otra relación a nivel individual, la cual es, a saber, una relación entre triplos genéticos. Diremos que un triplo genético es el *predecesor inmediato* de un segundo triplo genético si y sólo si el primer término del primer triplo es el padre por división del primer término del segundo. Al formular la definición estricta, utilizaremos letras mayúsculas para representar los triplos ordenados en cuestión, y encerraremos asimismo en paréntesis angulares las variables representativas de los miembros de los triplos como alternativa para designar dichos triplos, así:

1.3 $\quad \mathbf{Ip} = \widehat{\mathrm{R}}\,\widehat{\mathrm{S}}\,\{(\exists x, y, z, w, v) \cdot \mathrm{R} = \langle x, y, z\rangle \cdot \mathrm{S} = \langle w, u, v\rangle \cdot$

$$\cdot\, \mathbf{Gtp1}\,(x, y, z) \cdot \mathbf{Gtp1}\,(w, u, v) \cdot x\,\mathbf{Pd}\,w\}.$$

Puede probarse que esta relación de predecesor inmediato es de uno-a-muchos, asimétrica e intransitiva, como **Pd** y **Ep**, y que, por tanto genera jerarquías. Una jerarquía es un tipo de relación que se encuentra a menudo en biología. Es una relación que posee sólo un iniciador, es decir, un término que pertenece

al dominio, pero no a la conversa de la relación; y además es tal que la totalidad de su campo consta de este iniciador juntamente con todos los términos que puedan ser alcanzados a partir de ese iniciador mediante etapas sucesivas de dicha relación. Así, si tomamos un único triplo genético junto con todos sus descendientes por **Ip**, entonces la relación **Ip** con su campo limitado a esta colección, será una **Ip**-jerarquía. Una jerarquía tal dará una imagen mucho más fidedigna del actual estado de cosas que la que pueda dar una ordinaria división jerárquica, ya que detectará los ambientes de todos los biontes envueltos.

Con esto concluye cuanto había que decir aquí acerca de la **Pd**-genética a nivel individual. La sección siguiente está dedicada a clases de biontes, clases de ambientes, y a las relaciones entre ellos.

§ 2.

Antes de que podamos continuar con la construcción de nuestro sistema genético, será preciso discutir primero ciertos tópicos generales. Las nociones de caracteres hereditarios y caracteres adquiridos han desempeñado un conspicuo papel en la historia de la genética. Como estamos siguiendo el método extensional, no trataremos de caracteres, sino de las clases o conjuntos de objetos que se dicen tener o exhibir los caracteres. Pero ello no significa que hablemos de clases hereditarias o clases adquiridas. Por razones que se indicarán nos ocuparemos primero de *pares* de clases. En el primer volumen (p. 544) de sus *Principia Mathematica,* Whitehead y Russell discuten la muy general noción de una clase hereditaria con respecto a una relación de dos términos R. Allí se nos dice que una clase μ es *hereditaria con respecto a* R si y sólo si las cosas que están en la conversa de R con miembros de μ pertenecen también a μ. En la notación de los citados autores esto se escribe:

$$\breve{R}\text{“}\,\mu \subseteq \mu.$$

Aquí $\breve{R}$ es el signo representativo de la conversa de R, y ello, seguido por dos comas invertidas enfrente de un signo de clase, denota la clase de los objetos que están en la conversa de R con miembros de la clase cuyo signo sigue, la cual es, en este caso, la clase μ. Dicha expresión, seguida por el signo de inclusión y éste a su vez por μ, constituye un enunciado indicativo de que las cosas que están en la conversa de R con miembros de μ son también miembros de μ. Whitehead y Russell ofrecen luego ejemplos de clases hereditarias en el sentido expuesto. Uno de esos ejemplos es la clase de todos los hombres cuyo apellido es Pérez, con respecto a la relación de padre e hijo. Mas este no es, de hecho, un ejemplo adecuado, puesto que un hombre cuyo padre tiene por nombre Pérez no necesita llamarse Pérez, ya que puede cambiar su nombre mediante la firma de un documento legal. Nuestros autores sugieren asimismo como ejemplo el título nobiliario de Par con respecto a la relación de padre e hijo mayor; pero tampoco vuelve a tratarse de un ejemplo adecuado, puesto que el hijo mayor de un Par puede renunciar a su título. En ambos casos hay algo que se omite

y olvida, o dicho en otras palabras, algo de lo cual se ha abstraído. Y no otra cosa acontece en genética cuando se abstrae del factor ambiente. Pues en modo alguno podemos definir en la forma mentada, y con vistas a la ciencia genética, una clase hereditaria con respecto a la relación parental, ya que semejante clase sería incapaz de evolución. Es preciso, como veremos, definir un *par* hereditario de clases con respecto a *dos* relaciones, a saber, **Pd** y **En**. Esto será suficiente para la genética de la **Pd**. Mas para la genética del parentesco sexual se requerirá algo mucho más complicado.

Volviendo ahora a nuestro sistema genético, comenzamos por definir un conjunto de vástagos que se especifica por referencia a un conjunto al que pertenecen los padres y a un conjunto al que pertenecen los ambientes, y por tanto, a un par de conjuntos. Hemos de imponer, sin embargo, alguna restricción a los posibles conjuntos referidos, lo que haremos, en primera instancia, requiriendo que el primer conjunto se restrinja al campo de **Pd** y el segundo al dominio de **En**. Ello se lleva a cabo, en un primer paso, definiendo el conjunto de pares genéticos de conjuntos como sigue:

[D.2.0] $$\mathbf{Gsp} = \widehat{X}\widehat{K}\{X \subseteq C'\mathbf{Pd} \cdot K \subseteq D'\mathbf{En}\}.$$

Esta expresión afirma que un par ordenado $\langle X, K\rangle$ recibirá el nombre de un par genético de conjuntos si y sólo si X está incluido en el campo de **Pd** y K en el dominio de **En**, de forma que X constará solamente de padres y vástagos por **Pd** y K constará de ambientes de biontes. A continuación definimos conjuntos de vástagos que se especifican por referencia a tales pares genéticos de conjuntos:

[D.2.1] $$\mathbf{F}_K(X) = \widehat{z}\{(\exists x, y) \cdot \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot x \in X \cdot y \in K \cdot X\,\mathbf{Gsp}\,K\}.$$

De acuerdo con esta definición '$\mathbf{F}_K(X)$' denotará el conjunto de todos los vástagos que tengan un padre por **Pd** que sea miembro de X, y cuyo ambiente sea un miembro de K, supuesto que X y K formen un par genético de conjuntos. A continuación siguen algunos teoremas que pueden probarse con ayuda de la definición y el álgebra de conjuntos:

[T.2.11] Si $X \subseteq Y$, entonces $\mathbf{F}_K(X) \subseteq \mathbf{F}_K(Y)$.

[T.2.12] Si $K \subseteq N$, entonces $\mathbf{F}_K(X) \subseteq \mathbf{F}_N(X)$.

[T.2.13] $\mathbf{F}_K(X) \subseteq \mathbf{F}_K(X \cup Y)$. (Por 2.11, puesto que $X \subseteq X \cup Y$).

[T.2.14] $\mathbf{F}_K(Y) \subseteq \mathbf{F}_K(X \cup Y)$. (Similarmente $Y \subseteq X \cup Y$).

[T.2.15] $\mathbf{F}_K(X) \cup \mathbf{F}_K(Y) \subseteq \mathbf{F}_K(X \cup Y)$. (Por 2.13 y 2.14).

[T.2.16] $\mathbf{F}_K(X \cup Y) \subseteq \mathbf{F}_K(X) \cup \mathbf{F}_K(Y)$. (Por D.2.1, T.1.03, D.2).

[T.2.17] $\mathbf{F}_K(X \cup Y) = \mathbf{F}_K(X) \cup \mathbf{F}_K(Y)$. (Por T.2.15, T.2.16).

[T.2.18] $\mathbf{F}_K(X) \subseteq \mathbf{F}_{K \cup N}(X)$. (Por T.2.12 y $K \subseteq K \cup N$).

Los cuatro teoremas siguientes tratan, correlativamente, de sumas de conjuntos ambientales, llevando a:

[T.2.113] $\mathbf{F}_K(X \cup Y) \cup \mathbf{F}_N(X \cup Y) = \mathbf{F}_{K \cup N}(X \cup Y)$.

[T.2.114] $\mathbf{F}_{K \cup N}(X \cup Y) = \mathbf{F}_K(X) \cup \mathbf{F}_N(X) \cup \mathbf{F}_K(Y) \cup \mathbf{F}_N(Y)$. (Por T.2.17, T.2.113).

A continuación tenemos una sucesión de teoremas que se corresponde con la anterior pero tratando de productos o intersecciones de conjuntos en lugar de sumas.

[T.2.115] $\mathbf{F}_K(X \cap Y) \subseteq \mathbf{F}_K(X)$.

[T.2.119] $\mathbf{F}_K(X \cap Y) = \mathbf{F}_K(X) \cap \mathbf{F}_K(Y)$.

[T.2.124] $\mathbf{F}_{K \cap N}(X) = \mathbf{F}_K(X) \cap \mathbf{F}_N(X)$.

[T.2.126] $\mathbf{F}_{K \cap N}(X \cap Y) = \mathbf{F}_K(X) \cap \mathbf{F}_K(Y) \cap \mathbf{F}_N(X) \cap \mathbf{F}_N(Y)$.

[T.2.129] $\mathbf{F}_K(X) \cap \mathbf{F}_N(Y) = \mathbf{F}_N(X) \cap \mathbf{F}_K(Y)$.

Ahora es preciso que abandonemos por un tiempo los conjuntos de biontes, hasta después de haber considerado los correspondientes conjuntos de ambientes. Correlativamente a la expresión '$\mathbf{F}_K(X)$', referente a vástagos, utilizaremos para ambientes la expresión '$\mathbf{E}_X(K)$', definiéndola como sigue:

[D.2.2] $\mathbf{E}_X(K) = \widehat{\nu}\{(\exists x, y, z) \cdot \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot x \in X \cdot y \in K \cdot y \mathbf{Ep} \nu \cdot X \mathbf{Gsp} K\}$.

Esta definición establece que $\mathbf{E}_X(K)$ es el conjunto de todos los términos ν tales que para algún x, y, z, para los que $\mathbf{Off}(x, y, z)$ es verdadera, donde x pertenece a X e y a K, y además y es el predecesor ambiental de ν, y $\langle X, K \rangle$ es un par genético de conjuntos. Comunes a $\mathbf{F}_K(X)$ y a $\mathbf{E}_X(K)$ son las condiciones: $(\exists x, y, z)$, $\mathbf{Off}(x, y, z)$, $x \in X$, $y \in K$, y $X \mathbf{Gsp} K$; z, el vástago del par x, y, pertenece a $\mathbf{F}_K(X)$, y los correspondientes sucesores ambientales de y pertenecen a $\mathbf{E}_X(K)$.

Los teoremas relativos a $\mathbf{E}_X(K)$, y en lo que concierne a sumas y productos, se corresponden estrechamente con los referentes a $\mathbf{F}_K(X)$; bastará, por tanto, mencionar tan sólo unos cuantos en este lugar.

[T.2.214] $\mathbf{E}_{X \cup Y}(K \cup N) = \mathbf{E}_X(K) \cup \mathbf{E}_Y(K) \cup \mathbf{E}_X(N) \cup \mathbf{E}_Y(N)$.

[T.2.226] $\mathbf{E}_{X \cap Y}(K \cap N) = \mathbf{E}_X(K) \cap \mathbf{E}_Y(K) \cap \mathbf{E}_X(N) \cap \mathbf{E}_Y(N)$.

Las dos funciones cuyas leyes elementales hemos estado considerando –la función filial y la función ambiental, como podríamos llamarlas– nos llevan sólo sobre una generación; la tarea de extenderlas a cualquier número finito de generaciones queda, por lo tanto, por discutirse. Además, los teoremas que envuelven estas funciones que acaban de darse, discuten las dos funciones separadamente. Será importante estudiar teoremas que exhiban sus relaciones recíprocas. Pero antes de emprender estas tareas debe prestarse alguna atención a la *clasificación* de pares genéticos de conjuntos; porque esto desempeñará un importante papel en los desarrollos subsiguientes. Ello puede hacerse de dos formas según qué función usemos como base de nuestra clasificación.

Empezando con la función filial dividimos primero los pares genéticos de conjuntos en dos conjuntos mutuamente excluyentes de acuerdo con que *no* tengan vástagos (pares infértiles) o tengan vástagos (pares fértiles):

[D.2.3] $$\mathbf{Inf} = \widehat{X}\widehat{K}(\mathbf{F}_K(X) = \Lambda).$$

[D.2.4] $$\mathbf{Fert} = \widehat{X}\widehat{K}(\mathbf{F}_K(X) \neq \Lambda).$$

Así todo par genético de conjuntos es o fértil o infértil. A continuación dividimos los pares fértiles en dos grupos mutuamente exclusivos. El primer conjunto, al que llamaremos el inhomogéneo, consta de aquellos entre cuyos vástagos algunos pertenecen al conjunto parental, y algunos al *complemento* de este conjunto. Se entiende por complemento de un conjunto X al conjunto de todos los miembros del universo en el que estamos trabajando que *no* pertenecen a X; este conjunto se denota por '$\overline{X}$'. En el presente caso el universo consta de todos los biontes que se reproducen por división y de todos los ambientes de tales biontes. Puesto que el complemento bajo consideración es un conjunto de vástagos, constará de todos los vástagos que no son miembros de X en nuestro universo.

[D.2.5] $$\mathbf{Inhom} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{F}_K(X) \cap X \neq \Lambda \text{ y } \mathbf{F}_K(\overline{X}) \neq \Lambda\}.$$

El segundo subconjunto de pares fértiles consta de todos aquellos en los que los vástagos o pertenecen todos a X o pertenecen todos al complemento de X. Llamamos a éstos pares homogéneos.

[D.2.6] $$\mathbf{Hom} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{Fert}(X, K) \text{ y } [(\mathbf{F}_K(X) \cap X = \Lambda \text{ o } \mathbf{F}_K(X) \cap \overline{X} = \Lambda)]\}.$$

A partir del enunciado: $\mathbf{F}_K(X) \cap X = \Lambda$ podemos obtener el enunciado: $\mathbf{F}_K(X) \subseteq \overline{X}$, y viceversa; y a partir del enunciado: $\mathbf{F}_K(X) \cap \overline{X} = \Lambda$ podemos obtener el enunciado $\mathbf{F}_K(X) \subseteq X$, y viceversa. Consecuentemente, la anterior definición expresa lo que se estableció en la explicación verbal que la precedió.

A partir de las definiciones D.2.5 y D.2.6 se sigue que todo par fértil es homogéneo o inhomogéneo. Finalmente, dividimos los pares homogéneos en dos subconjuntos mutuamente excluyentes. Si un par homogéneo $\langle X, K\rangle$ es tal que $\mathbf{F}_K(X) \subseteq X$ lo llamamos par **F**-*hereditario*. Así, en lugar de *conjuntos* hereditarios hablaremos de *pares* hereditarios de conjuntos, siendo uno de ellos un conjunto de biontes y el otro un conjunto de ambientes.

[D.2.7] $$\mathbf{Hr_f} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{Hom}(X, K) \text{ y } \mathbf{F}_K(X) \subseteq X\}.$$

Los pares homogéneos que *no* son hereditarios se llamarán pares **F**-mutacionales; son los pares cuyos vástagos están todos incluidos en el *complemento* del conjunto parental:

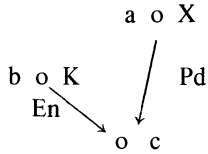
[D.2.8] $$\mathbf{Mt_f} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{Hom}(X, K) \text{ y } \mathbf{F}_K(X) \subseteq \overline{X}\}.$$

Ahora puede probarse el teorema siguiente:

> Cada par genético de conjuntos es o infértil, o inhomogéneo, o **F**-hereditario o **F**-mutacional.

Para esto dividimos en primer lugar los pares de conjuntos genéticos en fértiles e infértiles, luego dividimos los fértiles en homogéneos e inhomogéneos, y finalmente los homogéneos en **F**-hereditarios y **F**-mutacionales.

Volvemos ahora a la clasificación de los pares de conjuntos genéticos sobre la base de la función ambiental. Podemos usar las mismas designaciones que antes precediéndolas con una '**E**' en la forma verbal y escribiendo un pequeño suscrito '**e**' en la designación simbólica. Así podemos llamar a un par para el que $\mathbf{E}_X(K) = \Lambda$ es verdadero, par **E**-infértil, o miembro de $\mathbf{Inf_e}(X, K)$. Este será el caso si $\mathbf{F}_K(X) = \Lambda$ o si $\mathbf{F}_K(X) \neq \Lambda$ pero $\mathbf{F}_K(X) \cap \mathrm{D}'\mathbf{Pd} = \Lambda$. Esto está ilustrado por las flechas de la representación adjunta de **Off** (a, b, c), donde a∈X, b∈X y consecuentemente $c \in \mathbf{F}_K(X)$, pero como c no es un padre, b no puede estar en la relación **Ep** con cualquier cosa, y por tanto $\mathbf{E}_X(K) = \Lambda$. Esto sería también verdad si tuviésemos no $(a \in X)$ o no $(b \in K)$ o no **Off** (a, b, c).



[D.2.9] $\mathbf{Inf_e} = \widehat{X}\widehat{K}(\mathbf{E}_X(K) = \Lambda).$

[D.2.10] $\mathbf{Fert_e} = \widehat{X}\widehat{K}(\mathbf{E}_X(K) \neq \Lambda).$

[D.2.11] $\mathbf{Inhom_e} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{E}_X(K) \cap K \neq \Lambda \text{ y } \mathbf{E}_X(K) \cap \overline{K} \neq \Lambda\}.$

[D.2.12] $\mathbf{Hom_e} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{Fert_e}(X, K) \text{ y } (\mathbf{E}_X(K) \cap K = \Lambda \text{ o } \mathbf{E}_X(K) \cap \overline{K} = \Lambda)\}.$

[D.2.13] $\mathbf{Hr_e} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{Hom_e}(X, K) \text{ y } \mathbf{E}_X(K) \subseteq K\}.$

[D.2.14] $\mathbf{Mt_e} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{Hom_e}(X, K) \text{ y } \mathbf{E}_X(K) \subseteq \overline{K}\}.$

Así todo par genético de conjuntos es o **E**-infértil o **E**-inhomogéneo, o **E**-hereditario o **E**-mutacional.

Los teoremas que conectan estos dos tipos de clasificaciones de pares genéticos de conjuntos se darán luego. Pero está claro que todo par genético de conjuntos debe pertenecer a uno de los cuatro subconjuntos especificados por referencia a la función filial y a uno de los cuatro especificados por referencia a la función ambiental.

Antes de que podamos volver a la cuestión de las relaciones entre la función filial y la ambiental, permanece todavía el problema de definir las funciones correspondientes para generaciones sucesivas. Hay dos maneras de hacer esto. Una es identificar a la generación que sigue inmediatamente a $\mathbf{F}_k(X)$ con

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{F}_k(X)),$$

que se obtiene por la simple sustitución de '$\mathbf{F}_k(X)$' por 'X' en '$\mathbf{F}_k(X)$'. Un resultado inmediato de ello será que si

(a) $$\mathbf{F}_k(X) \subseteq X,$$

entonces debemos tener también

(b) $$\mathbf{F}_k(\mathbf{F}_k(X)) \subseteq X,$$

porque podemos sustituir 'X' por '$\mathbf{F}_k(X)$' en (a) y obtendremos:

(c) $$\mathbf{F}_k(\mathbf{F}_k(X)) \subseteq \mathbf{F}_k(X),$$

y a partir de (c) y de (a) obtendremos (b) debido a la transitividad de la relación de inclusión.

Este método de definir la segunda generación tiene así la peculiaridad de confinarnos al mismo conjunto ambiental K para cada generación sucesiva y esto nos confinaría a un sistema cerrado desde el que no habría escape ni evolución. Por tanto, debemos buscar una solución más general que no tenga esta restricción. Un método tal está usado en la siguiente definición:

[D.2.15] $$\mathbf{F}_k^2(X) = \widehat{z}\{(\exists x, y) \cdot \mathbf{Off}(x, y, z) \text{ y } x \in \mathbf{F}_k(X)\}.$$

Aquí no hay colocada ninguna restricción sobre el ambiente de z. Esta definición dice simplemente que z es un miembro de $\mathbf{F}_k^2(X)$ si y sólo si su padre por división pertenece a $\mathbf{F}_k(X)$. Se advertirá que no se menciona en esta definición a $X\mathbf{Gsp}K$. Ello no es necesario porque de la definición se sigue que si tenemos $z \in \mathbf{F}_k^2(X)$ debemos tener $X\mathbf{Gsp}K$. Por D.2.15 si tenemos $z \in \mathbf{F}_k^2(X)$ entonces hay un x tal que $x \in \mathbf{F}_k(X)$ y a partir de esto y de D.2.1 se sigue que $X\mathbf{Gsp}K$.

Podemos obtener la función correspondiente para la enésima generación, donde n es cualquier número cardinal finito mayor que 2, por medio de un procedimiento recursivo de la siguiente forma:

[D.2.16] $$\mathbf{F}_k^n(X) = \widehat{z}\{(\exists x, y) \cdot \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot x \in \mathbf{F}_k^{n-1}(X) \cdot 2 < n < \aleph_0\}.$$

$\aleph_0$ es el símbolo del mínimo número cardinal transfinito. El conjunto de todos los números naturales pertenece a este conjunto.

Partiendo de 2, para el que ya hemos dado la definición apropiada, D.2.16 nos dará $\mathbf{F}_k^2(X)$ y con ayuda de esta última y valiéndonos otra vez de D.2.16 podemos obtener $\mathbf{F}_k^4(X)$, y así sucesivamente. De nuevo no es necesario mencionar **Gsp**, porque puede probarse por inducción matemática que si hay un z tal que $z \in \mathbf{F}_k^n(X)$ entonces $x\mathbf{Gsp}K$, donde n es mayor que 2 y más pequeño que el menor cardinal infinito. X_0 es el signo que representa al número cardinal trasfinito más pequeño.

Volvemos ahora a las definiciones correspondientes para las funciones ambientales:

[D.2.17] $$\mathbf{E}_k^2(K) = \widehat{v}\{(\exists z, y, x) \cdot \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot y \in \mathbf{E}_x(K) \cdot y\,\mathbf{Ep}\,v\}.$$

[D.2.18] $$\mathbf{E}_x^n(K) = \widehat{v}\{(\exists x, y, z) \cdot \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot y \in \mathbf{E}_x^{n-1}(K) \cdot y \in \mathbf{Ep}\,v \cdot 2 < n < \aleph_0\}.$$

Por las razones dadas en conexión con $\mathbf{F}_k(X)$ no es necesario incluir '$X\,\mathbf{Gsp}\,K$' en las definiciones.

Otro tópico al que habrá de prestarse atención en esta etapa es la *existencia* de conjuntos. Se dice que un conjunto (excepto el conjunto vacío) existe si tiene miembros. Pero es preciso disponer de un artificio simbólico que nos permita asegurar que un conjunto no tiene miembros. Por ejemplo, si queremos expresar la creencia de que los gatos no son perros podemos hacerlo estableciendo que el producto o intersección de estos dos conjuntos es vacío, así:

$$\text{gatos} \cap \text{perros} = \Lambda.$$

Siendo 'Λ' la designación del conjunto vacío o nulo. Este conjunto tiene la peculiaridad de estar incluido en todo conjunto. Pues supóngase que A es un conjunto, entonces se dará el caso de que

$$\Lambda \subseteq \mathrm{A},$$

porque esto significa:

$$\text{para todo } x, \text{ si } x \in \Lambda \text{ entonces } x \in \mathrm{A},$$

y como '$x \in \Lambda$' es falso (Λ no tiene miembros) la anterior implicación es verdadera; porque, como aprendimos en la Parte I, una implicación con un antecedente falso es verdadera. Un resultado de esto es que si se nos da el enunciado:

$$\mathbf{F}_A(B) \subseteq B,$$

donde 'A' y 'B' son nombres de conjuntos, no variables o nombres sin sentido, no podemos inferir que $\mathbf{F}_A(B)$ sea no vacío. Por esta razón incluimos la cláusula '$\mathbf{F}_k(X) \neq \Lambda$' en la definición de un par **F**-hereditario.

Así no podemos asumir siempre que, cuando un enunciado puede probarse, los conjuntos concernientes son siempre no vacíos. Cuando surja una duda cualquiera sobre esta cuestión, será deseable establecer explícitamente qué conjuntos son no-vacíos. Con estas explicaciones en la mente podemos volver ahora a aquellos enunciados de nuestro sistema que expresan relaciones entre las funciones filial y ambiental. Daremos aquí sólo los teoremas más importantes y generales.

Empezamos con tres de ellos que serán muy usados en las pruebas de los teoremas subsiguientes:

[T.2.230] $\quad \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot \supset : x \in \mathbf{F}_k(X) \cdot \equiv \cdot y \in \mathbf{E}_X(K).$

(No se usan cuantificadores porque se presume que el teorema es afirmado para todos los valores de las variables). Este dice que si x es el padre e y el ambiente de z, entonces x es un miembro de $\mathbf{F}_k(X)$ si y sólo si y es un miembro de $\mathbf{E}_X(K)$.

[T.2.231] $\quad \mathbf{Off}(x, y, z) \cdot \supset : x \in \mathbf{F}_k^2(X) \cdot \equiv \cdot y \in \mathbf{E}_X^2(K).$

Aquí se afirma (de nuevo para todos los valores de las variables) que si $\mathbf{Off}(x, y, z)$, entonces x pertenece a $\mathbf{F}_k^2(X)$ si y sólo si y pertenece a $\mathbf{E}_X^2(K)$.

[T.2.232] $\quad \mathbf{Off}(x, y\, z) \cdot (2 < n < \aleph_0) \cdot \supset : x \in \mathbf{F}_k^n(X) \cdot \equiv \cdot y \in \mathbf{E}_X^n(K).$

Este teorema más general, que es demostrable por inducción matemática a partir de los otros dos, afirma que para cualquier número cardinal que sea mayor que 2 pero finito, si $\mathbf{Off}(x, y, z)$ entonces x pertenece a $\mathbf{F}_k^n(X)$ si y sólo si y pertenece a $\mathbf{E}_X^n(K)$.

A continuación tenemos tres teoremas concernientes a la existencia de conjuntos:

[T.2.233] $\quad \mathbf{F}_k^2(X) \neq \Lambda \supset \mathbf{F}_k(X) \neq \Lambda \cdot \mathbf{E}_X(K) \neq \Lambda.$

[T.2.234] $\quad \mathbf{F}_k^{n+1}(X) \neq \Lambda \supset \mathbf{F}_k^n(X) \neq \Lambda.$

[T.2.235] $\quad \mathbf{F}_k^{n+1}(X) \neq \Lambda \equiv \mathbf{E}_X^n(K) \neq \Lambda.$ $\qquad$ (Siempre que $(2 < n < \aleph_0)$).

Los dos primeros de estos teoremas afirman que si la función filial de una generación dada no es vacía, entonces la de la generación previa (para las mismas variables) no es vacía; lo que es obvio intuitivamente. El tercer teorema afirma que para cualquier n finito mayor que 2, la $(n+1)$ésima generación no es vacía si y sólo si la generación n-sima correspondiente para la función ambiental con las mismas variables no es vacía.

El siguiente teorema muestra bajo qué condiciones son idénticas las funciones $\mathbf{F}_k^2(X)$ y $\mathbf{F}_k(\mathbf{F}_k(X))$ y también las funciones ambientales correspondientes:

[T.2.236] $\quad \mathbf{F}_K(X) \subseteq X \cdot \mathbf{E}_X(K) \cdot \supset : \mathbf{F}_k^2(X) = \mathbf{F}_k(\mathbf{F}_k(X)) \cdot \mathbf{E}_X^2(K) = \mathbf{E}_X(\mathbf{E}_X(K))$.

Finalmente, tenemos dos teoremas sobre la inclusión.

[T.2.237] $\quad \mathbf{F}_k(X) \subseteq X \cdot \mathbf{E}_X(K) \subseteq K \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_k^n(X) \subseteq X \cdot \mathbf{E}_X^n(K) \subseteq K$ (para $2<n<\aleph$).

El último teorema envuelve también existencia:

[T.2.238] $\quad \mathbf{F}_k(X) \subseteq X \cdot \mathbf{E}_X(K) \subseteq K \cdot (2<n<\aleph) \cdot$

$$\cdot \mathbf{E}_X^{n-1}(K) \neq \Lambda \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_k^n(X) \neq \Lambda \cdot \mathbf{F}_k^n(X) \subseteq X.$$

Debemos considerar ahora definiciones para potencias superiores de $\mathbf{F}_k(X)$ y $\mathbf{E}_X(K)$ que llevan la misma variable ambiental en generaciones sucesivas. Distinguimos éstas de las anteriores poniendo el índice 2 *después* del paréntesis, en lugar de ponerlo tras las letras **F** o **E**. Así escribimos:

[D.2.19] $\quad \mathbf{F}_k(X)^2 = \mathbf{F}_k(\mathbf{F}_k(X))$ y

[D.2.20] $\quad \mathbf{F}_k(X)^n = \mathbf{F}_k(\mathbf{F}_k(X)^{n-1})$ donde $(2<n<\aleph_0)$.

Similarmente:

[D.2.21] $\quad \mathbf{E}_X(K)^2 = \mathbf{E}_X(\mathbf{E}_X(K))$ y

[D.2.22] $\quad \mathbf{E}_X(K)^n = \mathbf{E}_X(\mathbf{E}_X(K)^{n-1})$ donde $(2<n<\aleph_0)$.

Con la ayuda de estas definiciones podemos añadir algunos teoremas más para conectar estas funciones con las primeras. Pero antes de hacerlo será deseable introducir una notación para pares de conjuntos *doblemente* hereditarios, esto es, para aquellos que son **F**-hereditarios y **E**-hereditarios:

[D.2.23] $\quad \mathbf{Hr}_{\mathbf{fe}} = \widehat{X}\widehat{K}\{\mathbf{Hr}(X, K)$ y $\mathbf{Hr}_{\mathbf{e}}(X, K)\}$.

Podemos ahora formular una generalización de T.2.236:

[T.2.239] $\quad \mathbf{Hr}_{\mathbf{fe}}(X, K) \supset : \mathbf{F}_k^n(X) = \mathbf{F}_k(X)^n$ y $\mathbf{E}_X^n(K) = \mathbf{E}_X(K)^n$ si $(2<n<\aleph_0)$.

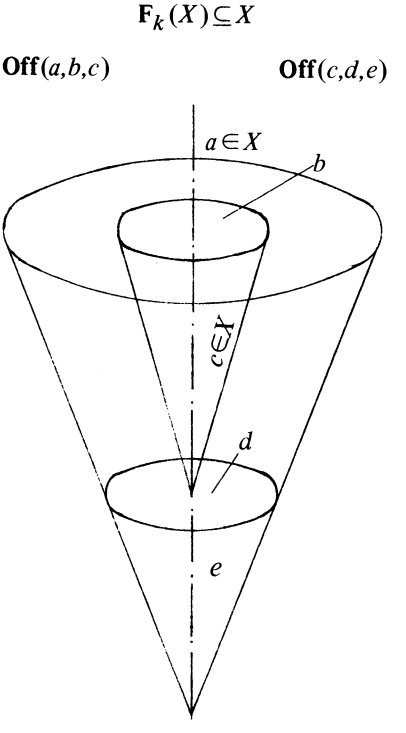
El teorema siguiente corresponde a T.2.237:

[T.2.240] $\quad \mathbf{Hr}_{\mathbf{fe}}(X, K) \supset : \mathbf{F}_k(X)^n \subseteq X$ y $\mathbf{E}_X(K)^n K$ si $(2<n<\aleph_0)$.

El último teorema muestra que con un par de conjuntos doblemente

hereditarios, tenemos un sistema completamente cerrado sin posibilidad de evolución.

En conexión con el uso de la función ambiental $\mathbf{E}_X(K)$ habría que tener en cuenta las siguientes consideraciones. Como se ilustra en el diagrama adjunto de Minkowski, la clasificación de los miembros de $\mathbf{F}_k(X)$ depende de la clasificación de parentesco y de ambiente en un sentido causal, esto es, el parentesco y el ambiente incluyen todos los antecedentes físicos relevantes de c, de los cuales se cree que depende su clasificación como miembro de X o de $\overline{X}$. Pero la situación es diferente en el caso de $\mathbf{E}_X(K)$, como puede verse en el diagrama; la clasificación de d no depende *sólo* de c a través de a y b, sino de muchos sucesos que caen fuera del límite de b. Cuando escribimos $\mathbf{E}_X(K) \subseteq K$ no estamos haciendo un enunciado causal físico, sino expresando meramente la hipótesis de que $\mathbf{E}_X(K)$ se asemejará a K en sus efectos *biológicos*. Estamos expresando la expectación de que d tendrá el mismo efecto sobre e que b tiene sobre c. No es sorprendente, por tanto, que algunas veces no se cumpla esta expectación. Deberíamos esperar que las predicciones genéticas que envuelven $\mathbf{E}_X(K)$ sean algunas veces contradichas por los hechos.



Ahora debemos retornar a la clasificación de pares de conjuntos genéticos y ocuparnos de los pares inhomogéneos. D.2.5 muestra que un par $\langle X, K \rangle$ se llama inhomogéneo si la función $\mathbf{F}_k(X)$ incluye tanto miembros de X como de su complemento, es decir, $\overline{X}$. Intuitivamente parece claro que cuando este es el caso X o K o ambos deben constar de dos subconjuntos, uno que produce miembros de X y otro miembros de $\overline{X}$. Pero no es fácil probar esto. La situación resulta más clara si hacemos uso de lo que podemos llamar **F**-matrices, esto es disposiciones de filas y columnas que muestran, para una elección dada de los conjuntos parental y ambiental, en qué conjunto se incluirá la función filial. Supongamos que tenemos un conjunto parental X compuesto de dos subconjuntos Y y Z mutuamente excluyentes; y un conjunto ambiental K compuesto de dos subconjuntos M y N mutuamente excluyentes. Entonces, si construimos **F**-matrices que muestren las formas posibles en que las cuatro funciones $\mathbf{F}_M(Y)$, $\mathbf{F}_N(Y)$, $\mathbf{F}_M(Z)$ y $\mathbf{F}_N(Z)$ pueden incluirse en X o en $\overline{X}$, encontramos que éstas son dieciséis en número: una no tendrá $\overline{X}$, otra no tendrá X, cuatro tendrán sólo una $\overline{X}$ y cuatro sólo una X, mientras que seis tendrán dos $\overline{X}$ y dos X. Tales matrices son las que a continuación se exponen:

1	Y	Z
M	X	X
N	X	X

2	Y	Z
M	$\overline{X}$	X
N	X	X

3	Y	Z
M	X	$\overline{X}$
N	X	X

4	Y	Z
M	X	X
N	X	$\overline{X}$

5	Y	Z
M	X	X
N	$\overline{X}$	X

6	Y	Z
M	$\overline{X}$	$\overline{X}$
N	X	X

7	Y	Z
M	X	$\overline{X}$
N	X	$\overline{X}$

8	Y	Z
M	X	X
N	$\overline{X}$	$\overline{X}$

9	Y	Z
M	$\overline{X}$	X
N	$\overline{X}$	X

10	Y	Z
M	$\overline{X}$	X
N	X	$\overline{X}$

11	Y	Z
M	X	$\overline{X}$
N	$\overline{X}$	X

12	Y	Z
M	X	$\overline{X}$
N	$\overline{X}$	$\overline{X}$

13	Y	Z
M	$\overline{X}$	X
N	$\overline{X}$	$\overline{X}$

14	Y	Z
M	$\overline{X}$	$\overline{X}$
N	$\overline{X}$	X

15	Y	Z
M	$\overline{X}$	$\overline{X}$
N	X	$\overline{X}$

16	Y	Z
M	$\overline{X}$	$\overline{X}$
N	$\overline{X}$	$\overline{X}$

Se verá que la matriz número 1, que no tiene $\overline{X}$ corresponde a $\mathbf{F}_k(X) \subseteq X$ porque Y y Z son indistinguibles y M y N son también indistinguibles, perteneciendo todos los vástagos a X. Similarmente, la matriz número 16 corresponde

a $\mathbf{F}_k(X) \subseteq \overline{X}$ porque X no ocurre, y de esta forma Y y Z son de nuevo indistinguibles, y lo mismo es verdad para M y N. Todas las catorce matrices restantes tiene al menos una X y una $\overline{X}$, de forma que Y y Z o M y N son distinguibles; y consecuentemente estas matrices corresponden a las instancias posibles de **Inhom** (X, K).

Podemos volver ahora a la tarea de probar el teorema siguiente:

[T.2.241] Para todo X y K:

$$\mathbf{Inhom}\,(X, K) \equiv : (Y, Z, M, N) : Y \subseteq X \cdot Z \subseteq X \cdot M \subseteq K \cdot N \subseteq K \cdot$$
$$\cdot \mathbf{F}_M(Y) \cap \overline{X} \neq \Lambda \cdot \mathbf{F}_N(Z) \cap X \neq \Lambda.$$

Este teorema afirma que cualquier par $\langle X, K \rangle$ es inhomogéneo si y sólo si existen los conjuntos Y, Z, M, N, tales que Y y Z están ambos incluidos en X, y M y N están incluidos en K y $\mathbf{F}_M(Y) \cap \overline{X} \neq \Lambda$ y $\mathbf{F}_N(Z) \cap X \neq \Lambda$.

Para hacer la prueba más clara la dividiremos del modo siguiente. Primero formularemos seis lemas con la ayuda de los cuales puede probarse el teorema. Luego daremos las pruebas de los lemas, y finalmente expondremos cómo se prueba el teorema a partir de los lemas.

Lema 1. Para todo X y K:

$$(\exists Z)(\exists N) : Z \subseteq X \cdot N \subseteq K \cdot \mathbf{F}_N(Z) \cap X \neq \Lambda \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_k(X) \cap X \neq \Lambda.$$

Este lema establece que para todo X y K, si existe un Z y un N tales que Z está incluido en X, y N en K y entre los vástagos $\mathbf{F}_N(Z)$ hay miembros de X, entonces entre los vástagos $\mathbf{F}_k(X)$ hay miembros de X. La prueba es como sigue:

i) Si $(\exists Z, N) \cdot Z \subseteq X \cdot N \subseteq K$ entonces $\mathbf{F}_N(Z) \subseteq \mathbf{F}_k(X)$.

Esta es una aplicación de los teoremas T.2.11 y T.2.12 dados antes.

ii) $(\mathbf{F}_N(Z) \cap X) \subseteq \mathbf{F}_N(Z)$.

Esta es una instancia del teorema general: $A \cap B \subseteq A$.

iii) $(\mathbf{F}_N(Z) \cap X) \subseteq \mathbf{F}_N(Z)$ y $\mathbf{F}_N(Z) \subseteq \mathbf{F}_k(X) \cdot \supset \cdot (\mathbf{F}_N(Z) \cap X) \cap \mathbf{F}_k(X)$.

Esta es una instancia del teorema general: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

iv) $(\mathbf{F}_N(Z) \cap X) \subseteq \mathbf{F}_k(X) \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_N(Z) \cap X = \mathbf{F}_N(Z) \cap X \cap \mathbf{F}_k(X)$.

Esta es una instancia del teorema general: si $A \subseteq B$ entonces $A = A \cap B$.

v) $(\mathbf{F}_N(Z) \cap X) \neq \Lambda$ y $(\mathbf{F}_N(Z) \cap X) =$
$$= (\mathbf{F}_N(Z) \cap X \cap \mathbf{F}_k(X) \cdot \supset \cdot (\mathbf{F}_N(Z) \cap X \cap \mathbf{F}_k(X)) \neq \Lambda.$$

Este es un ejemplo de: si $A \neq \Lambda$ y $A = B$ entonces $B \neq \Lambda$.

vi) $(\mathbf{F}_N(Z) \cap X \cap \mathbf{F}_k(X)) \neq \Lambda \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_k(X) \cap X \neq \Lambda$.

Este es un ejemplo de: si $A \cap B \cap C \neq \Lambda$ entonces $C \cap B \neq \Lambda$.

vii) Las líneas (ii) a (vi) muestran que, a partir de la línea (i), $\mathbf{F}_K(X) \cap X \neq \Lambda$ es derivable, y ello prueba el Lema 1.

Lema 2. Para todo X y K:

$$\text{Si } (\exists Y, M): Y \subseteq X \text{ y } M \subseteq K \text{ y } \mathbf{F}_M(Y) \cap \overline{X} \neq \Lambda, \text{ entonces } \mathbf{F}_K(X)\,\overline{X} \neq \Lambda.$$

Esto es demostrable de una manera exacta por analogía a lo usado para el Lema 1.

Lema 3. Para todo X y K:

$$\text{Si } (\exists Z, Y, N, M): Z \subseteq X \cdot Y \subseteq X \cdot N \subseteq K \cdot M \subseteq K \cdot \mathbf{F}_N(Z) \cap X \neq \neq \Lambda \cdot \mathbf{F}_M(Y) \cap \overline{X} \neq \Lambda \text{ entonces } \mathbf{Inhom}\,(X, K).$$

Esto se obtiene simplemente por combinación de los Lemas 1 y 2, y usando D.2.5.

Lema 4. Para todo X y K:

$$(Z)\,(N): Z \subseteq X \cdot N \subseteq K \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_N(Z) \subseteq \overline{X} : \supset \cdot \mathbf{F}_K(X) \subseteq \overline{X}.$$

Aquí se afirma que si para todo Z y N tales que Z esté incluido en X y N en K tenemos $\mathbf{F}_N(Z)$ incluido en $\overline{X}$, entonces $\mathbf{F}_K(X) \subseteq \overline{X}$.

Prueba: El antecedente de esta implicación está afirmado para todos los valores de Z y N, y podemos por lo tanto sustituir Z por X y N por K obteniendo: $X \subseteq X \cdot K \subseteq K \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_K(X) \subset \overline{X}$.

Lema 5. Para todo X y K:

$$(Y)\,(M): Y \subseteq X \cdot M \subseteq K \cdot \supset \cdot \mathbf{F}_M(Y) \subseteq X : \supset \cdot \mathbf{F}_K(X) \subseteq X.$$

Este lema es análogo al Lema 4 y se prueba de forma análoga.

Lema 6. Para todo X y K:

$$\mathbf{Inhom}\,(X,K) \cdot \supset : (\exists Z, Y, M, N) \cdot Z \subseteq X \cdot Y \subseteq X \cdot M \subseteq K \cdot N \subseteq K \cdot \mathbf{F}_N(Z) \cap X \neq \neq \Lambda \cdot \mathbf{F}_M(Y) \cap \overline{X} \neq \Lambda.$$

Este lema afirma que para todo X y K, si X, K es un par inhomogéneo, existen entonces conjuntos Z, Y, N y M tales que Z e Y están incluidos en X, y N y M en K, y entre el conjunto $\mathbf{F}_N(Z)$ hay miembros de X y entre el conjunto $\mathbf{F}_M(Y)$ hay miembros de $\overline{X}$.

Prueba: Se prueba con la ayuda de D.2.5, transponiendo los Lemas 4 y 5, y formando la conjunción del resultado. Lo cual se lleva a cabo negando el antecedente y el consiguiente de cada uno y haciendo del consiguiente negado el antecedente, y del antecedente negado el consiguiente del nuevo enunciado. Así, si tenemos una implicación de la forma $p \supset q$, la transponemos escribiendo $\sim q \supset \sim p$. Nótese que $\sim(\mathbf{F}_K(X) \subseteq X)$ es equivalente a $\mathbf{F}_K(X) \cap \overline{X} \neq \Lambda$.

Finalmente, el Teorema T.2.241 se obtiene formando la conjunción del

Lema 3 con el Lema 6, porque la conjunción de dos implicaciones tales conduce a una equivalencia.

§ 3.

Pasamos ahora a la última sección de nuestro sistema en su presente estado de desarrollo, en la que se introducirá la tercera de nuestras nociones no definidas –la familia fenotípica. Pero esto debe explicarse primero. Los conjuntos que hemos estado discutiendo hasta ahora han sido todos conjuntos de biontes individuales o de ambientes individuales. Las familias de fenotipos no son conjuntos de individuos, sino que son conjuntos de conjuntos de individuos. Por lo tanto, se dice que son de un tipo diferente y superior de los conjuntos de individuos y no deben confundirse con ellos. Los conjuntos que forman los miembros de las familias fenotípicas son los conjuntos que ordinariamente se llaman fenotipos. Supongamos que f es una familia fenotípica de n miembros que podemos denotar por $P_1, P_2, \ldots, P_n$, entonces f se representaría por

$$f = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}.$$

Cuando decimos que dos objetos difieren uno de otro, usualmente significamos que difieren *en algún respecto.* Si tomamos un miembro de P_1 y un miembro de P_2 estos diferirán en algún respecto; pero si tomamos dos miembros de P_1 *no* diferirán en ese respecto. La familia de fenotipo f es el respecto, tomado en extensión, en que los miembros de uno cualquiera de sus miembros difieren de los de otro de sus miembros. Pero esto estará más claro si tomamos un ejemplo simple. La obra de Mendel abarca siete familias fenotípicas, cada una de ellas con únicamente dos miembros. En el caso de una de las siete familias el respecto, en intensión, era el color de los cotiledones de los miembros de la especie *Pisum sativum.* Su extensión estaba cubierta por los dos miembros: el conjunto de plantas de las especies anteriores que tenían cotiledones amarillos y el conjunto que tenía cotiledones verdes. Usando Y para el conjunto de las plantas con cotiledones amarillos y G para el conjunto con verdes, podemos representar esta familia de fenotipo mediante $\{Y, G\}$. Un punto importante a recordar sobre una familia de fenotipo es que todos sus miembros están incluidos en uno y el mismo género. Todas las familias de Mendel estaban asociadas de esta forma con el género *Pisum*.

Son cinco en número los axiomas del sistema que gobiernan el uso de la noción de familia fenotípica. El primero establece simplemente que ninguna familia de fenotipo es vacía. Usando '**phenfam**' para designar el conjunto de todas las familias fenotípicas, este axioma puede formularse como sigue:

[A.7] $$(f): f \in \textbf{phenfam} \supset f \neq \Lambda.$$

El axioma siguiente establece que todos los miembros de las familias fenotípicas son también conjuntos no vacíos:

[A.8] $$(f)\,(P): f \in \textbf{phenfam} \text{ y } P \in f \cdot \supset \cdot P \neq \Lambda.$$

El tercero de estos axiomas establece que dos familias fenotípicas distintas no pueden tener un miembro en común, de forma que si f es una familia de fenotipo y g es una familia de fenotipo y $f \cap g$ no es vacía, entonces f y g son estrictamente idénticas, teniendo *todos* sus miembros en común.

[A.9] $\quad (f)\,(g) : f, g \in \mathbf{phenfam} \;\text{ y }\; f \cap g \neq \Lambda \cdot \supset f = g.$

Con la ayuda de estos axiomas es posible probar los teoremas siguientes:

[T.3.0] $\quad (f)\,(g) : f, g \in \mathbf{phenfam} \cdot f \subseteq g \cdot \supset \cdot f = g.$

Esto afirma que si una familia fenotípica está incluida en otra, éstas deben ser idénticas. Si $f \subseteq g$ tenemos, por el álgebra de conjuntos, $f = f \cap g$; y por lo tanto, por A.7, $f \cap g \neq \Lambda$, y así por A.9 $f = g$.

[T.3.1] $\quad (f)\,(X) : f \in \mathbf{phenfam} \;\text{ y }\; (f \cup X) \in \mathbf{phenfam} \cdot \supset \cdot X \subseteq f.$

Este teorema establece que si f y X son dos conjuntos cualesquiera, tales que f es una familia fenotípica y la suma de f y X es una familia fenotípica, entonces X debe incluirse en f. Por el álgebra de conjuntos $f \subseteq f \cup X$ y siendo f una familia fenotípica tenemos $f = f \cup X$ por T.3.0. De nuevo, por el álgebra de conjuntos tenemos $X \subseteq f \cup X$ y así a partir de $X \subseteq f \cup X$ y $f \cup X = f$ tenemos $X \subseteq f$.

[T.3.2] $\quad (f) : f \in \mathbf{phenfam} \cdot \supset : (X)\,(f \cup X) \in \mathbf{phenfam} \cdot \equiv \cdot X \subseteq f.$

A partir de T.3.1 obtenemos:

(a) $\quad (f) : f \in \mathbf{phenfam} \cdot \supset \cdot (X)\,(f \cup X) \in \mathbf{phenfam} \cdot \supset \cdot X \subseteq f,$

y porque, cuando tenemos $X \subseteq f$ tenemos también $f = (X \cup f)$, si $f \in \mathbf{phenfam}$ podemos escribir $(X \cup f) \in \mathbf{phenfam}$; de forma que obtenemos:

(b) $\quad (f) : f \in \mathbf{phenfam} \cdot \supset \cdot (X)\, X \subseteq f \cdot \supset \cdot (X \cup f) \in \mathbf{phenfam},$

y a partir de (a) y (b) obtenemos T.3.2.

Los dos axiomas restantes conciernen a los miembros de las familias fenotípicas. A.10 establece que si un miembro P y un miembro Q de una familia fenotípica tienen un miembro en común, son idénticos. Los Axiomas 8 y 10 afirman ambos que las familias fenotípicas son conjuntos de conjuntos no vacíos mutuamente excluyentes.

[A.10] $\quad (f)\,(P)\,(Q) : f \in \mathbf{phenfam} \cdot P \in f \cdot Q \in f \cdot P \cap Q \neq \Lambda \cdot \supset \cdot P = Q.$

Finalmente, el último axioma establece que si x es un vástago cualquiera por división, entonces existe una familia fenotípica f y un miembro P de f tal que $x \in P$ y $P \in f$ (nótese que un miembro de P no puede ser también miembro de f porque f y P son de tipos diferentes).

[A.11] $\quad (x) : x \in \mathrm{C}'\mathbf{Pd} \cdot \supset \cdot (\exists f)\,(\exists P) \cdot f \in \mathbf{phenfam} \cdot x \in P \cdot P \in f.$

Los teoremas siguientes pueden probarse ahora de forma similar a la usada de T.3.0 a T.3.2.

[T.3.3] $(f)(P)(Q): f \in \textbf{phenfam} \cdot P \in f \cdot Q \in f \cdot (P \cup Q) \in f \cdot \supset \cdot P = Q.$

[T.3.4] $(f)(P)(Q): f \in \textbf{phenfam} \cdot P \in f \cdot Q \in f \cdot P = Q \cdot \supset \cdot (P \cup Q) \in f.$

[T.3.5] $(f)(P)(Q): f \in \textbf{phenfam} \cdot P \in f \cdot Q \in f \cdot \supset \cdot (P \cup Q) \in f \equiv P = Q.$

Estos teoremas muestran que los Axiomas 7, 9 y 10 son suficientes para establecer que las familias fenotípicas y sus miembros no son sólo conjuntos sino también *clases*, en el sentido de que si se añade un conjunto cualquiera a una familia fenotípica el resultado será una familia fenotípica sólo si lo que se añade es ello mismo un subconjunto de la familia. (Del mismo modo si añadimos cualquier cosa –excepto naranjas– al conjunto de todas las naranjas, el resultado no es una *clase* de fruta en el sentido de que el conjunto de todas las naranjas es una clase de fruta). El mismo principio se aplica a los fenotipos mismos. Si al conjunto de todos los guisantes con cotiledones amarillos le añadimos un guisante con cotiledones verdes, la suma *no* es un fenotipo ni una clase de guisantes sino una *mixtura* de clases.

A continuación pasamos a una importante relación de dos términos entre familias fenotípicas. Diremos que una familia fenotípica f es *isogenérica* con una familia fenotípica g si y sólo si sus sumas son idénticas. Por suma de un conjunto de conjuntos se entiende el conjunto de todos los términos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos. Así la suma de una familia fenotípica f, denotada por $s'f$, será:

$$s'f = \hat{x}(\exists P) \cdot P \in f \text{ y } x \in P.$$

La definición de la relación de ser isogenérica es como sigue:

[D.3.0] $$\textbf{Isog} = \hat{f}\hat{g}\{f, g \in \textbf{phenfam} \text{ y} \{s'f = s'g\}.$$

Esta relación es claramente simétrica y transitiva y, por tanto, genera clases de equivalencia. Al conjunto de las clases de equivalencia de la relación isogenérica lo denotamos por Equ (**Isog**) y lo definimos como sigue:

[D.3.1] $$\text{Equ}(\textbf{Isog}) = \hat{\mu}\{(f)(g): f \in \mu \cdot \supset \cdot g \in \mu \cdot \equiv \cdot f \textbf{ Isog}\}.$$

Si dos familias fenotípicas pertenecen a la misma clase de equivalencia de la relación isogenérica, son isogenéricas una con otra; y si dos familias fenotípicas son isogenéricas, entonces pertenecen a la misma clase de equivalencia de esa relación. Dos clases de equivalencia tales no tienen miembros en común. Nótese que estas clases de equivalencia pertenecen a un tipo inmediatamente superior a las familias fenotípicas, ya que estas últimas son miembros de ellas. Por esa razón, usamos letras griegas como variables que tienen clases de equivalencia de relaciones isogenéricas como valores.

Para aclarar esto construiremos un simple ejemplo de una clase de equivalencia imaginaria de la relación isogenérica. Supongamos que f, g y h son todas familias fenotípicas y todas mutuamente isogenéricas. Supongamos además que ninguna otra familia fenotípica es isogenérica con cualquiera de ellas. Llamemos a este resultado la clase de equivalencia μ, entonces

$$\mu = \{f, g, h\}.$$

Para extender este ejemplo como una ilustración de nuestro próximo paso, supongamos que la relación de un miembro de estas tres familias fenotípicas es como sigue:

$$f = \{P_1, P_2\};\ g = \{Q_1, Q_2, Q_3\};\ h = \{R_1, R_2\}.$$

Ahora procederemos a formar lo que se llamarán las *clases seleccionadas* de μ. Hacemos esto tomando justo un miembro de cada una de las tres clases en todas las formas posibles; esto conducirá:

$$\{P_1, Q_1, R_1\}, \{P_1, Q_1, R_2\}, \{P_1, Q_2, R_1\}, \{P_1, Q_2, R_2\},$$
$$\{P_1, Q_3, R_1\}, \{P_1, Q_3, R_2\}, \{P_2, Q_1, R_1\}, \{P_2, Q_1, R_2\},$$
$$\{P_2, Q_2, R_1\}, \{P_2, Q_2, R_2\}, \{P_2, Q_3, R_1\}, \{P_2, Q_3, R_2\}.$$

Finalmente, seleccionamos el producto de cada una de estas clases seleccionadas.

$$\{P_1 \cap Q_1 \cap R_1\}, \{P_1 \cap Q_1 \cap R_2\}, \{P_1 \cap Q_2 \cap R_1\}, \{P_1 \cap Q_2 \cap R_2\},$$
$$\{P_1 \cap Q_3 \cap R_1\}, \{P_1 \cap Q_3 \cap R_2\}, \{P_2 \cap Q_1 \cap R_1\}, \{P_2 \cap Q_1 \cap R_2\},$$
$$\{P_2 \cap Q_2 \cap R_1\}, \{P_2 \cap Q_2 \cap R_2\}, \{P_2 \cap Q_3 \cap R_1\}, \{P_2 \cap Q_3 \cap R_2\}.$$

Denotamos el conjunto de todas las clases seleccionadas de una clase de equivalencia μ de relaciones isogenéricas por $\mathbf{slc}(\mu)$, y al conjunto de los productos de estas clases por $\mathbf{psc}(\mu)$.

Las definiciones formales de estas nociones son un poco complicadas. Envuelven la idea de una relación selectiva como se usó en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. El teorema siguiente (P. M.* 80.14) muestra lo que se entiende por una relación selectiva, que está incluida en la relación de relación de miembros de conjunto, en cuyo caso el conjunto de tales relaciones se denota por $\epsilon'_\Delta \mu$:

$$R \in \epsilon'_\Delta \mu \cdot \equiv \cdot R \in 1 \to \mathbf{cls} \cdot R \subset \epsilon \cdot \cup' R = \mu.$$

Este teorema establece que una relación R pertenece al conjunto $\epsilon'_\Delta \mu$ si y sólo si R es de uno-a-muchos y está incluida en ϵ y tiene a μ como su dominio converso. Con esta relación en mente podemos definir ahora el conjunto de las clases seleccionadas de μ como sigue:

[D.3.2] $$\mathbf{slc}(\mu) = \widehat{\delta}\{\mu \in \mathrm{Equ}(\mathbf{Isog}) \cdot (\exists R) \cdot R \in \epsilon'_\Delta \mu \cdot \delta = \mathrm{D}'R\}.$$

Esta definición afirma que si δ es una clase seleccionada de la clase de equivalencia μ de la relación isogenérica si y sólo si existe una relación selectiva R que pertenece a $\epsilon'_\Delta \mu$ y δ es su dominio.*

* $\mathbf{slc}(\mu)$ es un conjunto de fenotipos y por lo tanto un conjunto de conjuntos; si μ es un miembro de Equ (**Isog**), es un conjunto de conjuntos de fenotipos, y por lo tanto de un nivel inmediatamente superior a $\mathbf{slc}(\mu)$ en cuanto al tipo. Al objeto de evitar la confusión de tipos, usamos letras griegas como μ y λ para variables que tienen miembros de Equ (**Isog**) como valores y letras como γ y δ para variables que tienen por valores a miembros de $\mathbf{slc}(\mu)$.

Puesto que R es una relación de uno-a-muchos y μ es un conjunto de familias fenotípicas, δ constará de sólo un fenotipo de *cada una* de las familias que pertenecen a μ. Esta noción no es muy usada excepto como un paso para la definición de **psc** (μ) que es como sigue:

[D.3.3] $$\mathbf{psc}\,(\mu) = \widehat{X}\{(\exists\delta)\cdot\delta\in\mathbf{slc}\,(\mu)\cdot X = p'\delta\}.$$

Esto afirma que un conjunto X es el producto de una clase seleccionada de μ si, y sólo si, existe una clase seleccionada δ de μ y X es el producto de δ. Por producto de un conjunto de clases se entiende el conjunto de todos aquellos términos que son miembros de cada una de las clases del conjunto. La definición formal es como sigue:

$$p'\delta = \widehat{x}\{(X)\cdot X\in\delta\cdot\supset\cdot x\in X\},$$

lo que es decir: si δ es un conjunto de clases, entonces x pertenece al producto de este conjunto si, y sólo si, para toda clase X que pertenezca a δ, x es un miembro de X. Un teorema importante sobre **psc** (μ) para cualquier μ es el siguiente:

[T.3.3] $$(\mu)\,(X)\,(Y):X\in\mathbf{psc}\,(\mu)\cdot Y\in\mathbf{psc}\,(\mu)\cdot X\cap Y\neq\Lambda\cdot\supset\cdot X = Y,$$

que establece que si X es el producto de una clase seleccionada de μ e Y es el producto de una clase seleccionada de μ y X e Y tienen un miembro en común, entonces ellos son estrictamente idénticos.

Nos encontramos ahora en posición de conectar la noción de producto de una clase seleccionada a partir de una clase de equivalencia μ de relaciones isogenéricas con las funciones filial y ambiental, y juntar de esta forma todas las partes de nuestro sistema. Ello se hace definiendo una función cuyos tres argumentos son (i) un conjunto de padres por división, (ii) un conjunto de ambientes y (iii) una clase de equivalencia μ; y el valor de éste es la unidad del fenotipo de μ. Denotemos esta función mediante **pf** (X, K, μ), siendo escogidas las letras **pf** como para sugerir unidad de fenotipo y 'función filial'.*

La definición es un condicional como sigue:

[D.3.4] $$\mathbf{pf}\,(X,K,\mu) = S\cdot\equiv\cdot S\in\mathbf{psc}\,(\mu)\cdot X\subseteq s's'\mu\cdot\mathbf{E}_X(K)\neq\Lambda\cdot\mathbf{F}_K(X)\subseteq S.$$

Esta definición establece que S es el valor de la función **pf** (X, K, μ) si y sólo si S es la unidad de fenotipo de μ en que está incluida $\mathbf{F}_K(X)$, y X está incluida en la suma de la suma de μ (la suma de μ es el conjunto de todos los fenotipos que pertenecen a un miembro de μ; y la suma de la suma de μ es el conjunto de todos los miembros de estos fenotipos). Esta cláusula concerniente a X está insertada para restringir a X, pero puede probarse que es innecesaria. Pospondremos los teoremas que envuelven esta definición porque constituyen un sillar para la próxima, que introduce la importante noción de tétrada genética:

---

* Como la frase 'producto de una clase seleccionada de μ' es demasiado larga y dura, la sustituiremos desde ahora por la frase "unidad de fenotipo de μ". Esto está justificado por el hecho de que un fenotipo en el sentido ordinario es la *suma* de un número de tales unidades. Así, en lo que sigue, cuando tengamos en símbolos '$S\in\mathrm{psc}\,(\mu)$' lo expresaremos en palabras escribiendo 'S es una unidad de fenotipo de μ'.

[D.3.5] $\mathbf{Gtd} = \widehat{X}\widehat{K}\widehat{S}\widehat{\mu}\{\mathbf{pf}(X, K, \mu) = S \cdot S \subseteq X : (Y)(N) \cdot \mathbf{pf}(Y, N, \mu) = S \cdot \supset \cdot Y \subseteq X \cdot N \subseteq K\}.$

Esta definición afirma que una tétrada de conjuntos X, K, S y μ, ha de llamarse una *tétrada genética* si y sólo si $\mathbf{pf}(X, K, \mu) = S$ y S está incluido en X; y para todo Y y para todo N tales que $\mathbf{pf}(Y, N, \mu) = S$, tenemos que Y está incluido en X y N en K.

La noción de tétrada genética es básica para la **Pd**-genética, como mostrarán los teoremas siguientes y algunas definiciones que la envuelven. Daremos primero algunos de los teoremas más fáciles.

[T.3.6] $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu) \supset S \in \mathbf{psc}(\mu)$ y $\mu \in \mathrm{Equ}(\mathbf{Isog})$.

Este teorema está claro a partir de D.3.5, D.3.4, D.3.3 y D.3.2.

[T.3.7] $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu) \supset \mathbf{Hr_f}(X, K)$.

Este teorema afirma que los dos primeros términos en una tétrada genética forman un par **F**-hereditario. Esto se prueba fácilmente de la forma siguiente: D.3.5 y D.3.4 nos dicen que $\mathbf{E}_X(K) \neq \Lambda$, y a partir de esto, por D.2.2 y D.2.1 vemos que $\mathbf{F}_K(X) \neq \Lambda$. También a partir de D.3.4 y D.3.5 tenemos que $\mathbf{F}_K(X) \subseteq S$ y $S \subseteq X$, de lo que se sigue que $\mathbf{F}_K(X) \subseteq X$. Finalmente, a partir de $\mathbf{F}_K(X) \neq \Lambda$ y $\mathbf{F}_K(X) \subseteq X$ obtenemos mediante D.2.4, D.2.6 y D.2.7, el resultado: $\mathbf{Hr_f}(X, K)$.

[T.3.8] $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu)$ y $\mathbf{F}_K(S) \neq \Lambda \cdot \supset \cdot \mathbf{Hr_f}(S, K)$.

Este teorema afirma que con tal que $\mathbf{F}_K(S)$ no sea vacío y $\langle X, K, S, \mu\rangle$ formen una tétrada genética, entonces el par $\langle S, K\rangle$ es un par **F**-hereditario. Lo cual se prueba fácilmente como sigue: tenemos a partir de D.3.5 $S \subseteq X$ y a partir de esto con la ayuda de T.2.11 obtenemos $\mathbf{F}_K(S) \subseteq \mathbf{F}_K(X)$; y finalmente, porque (de nuevo por D.3.5) tenemos $\mathbf{F}_K(X) \subseteq S$, tenemos también $\mathbf{F}_K(S) \subseteq S$; y así, supuesto $\mathbf{F}_K(S) \neq \Lambda$, por D.2.4, D.2.6 y D.2.7, tendremos $\mathbf{Hr_f}(S, K)$.

Los cuatro teoremas siguientes se prueban a partir de las definiciones.

[T.3.9] Si $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu)$ y $\mathbf{Gtd}(Y, N, S, \mu)$ entonces $X = Y$ y $K = N$.

[T.3.10] Si $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu)$ y $\mathbf{Gtd}(X, K, P, \mu)$ entonces $S = P$.

[T.3.11] Si $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu)$ y $\mathbf{Gtd}(Y, N, P, \mu)$ entonces $S = P \cdot \equiv \cdot X = Y \cdot K = N$.

[T.3.12] Si $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu)$ y $\mathbf{Gtd}(X, N, P, \mu)$ entonces $\mathbf{F}_N(S) \subset P \cdot \mathbf{F}_K(P) \subset S$.

El último teorema resulta del hecho de que a partir de $S \subseteq X$ obtenemos $\mathbf{F}_N(S) \subseteq \mathbf{F}_N(X)$; y $\mathbf{Gtd}(X, N, P, \mu)$ nos da $\mathbf{F}_N(X) \subseteq P$, por tanto tenemos $\mathbf{F}_N(S) \subseteq P$ y de forma análoga podemos obtener $\mathbf{F}_K(P) \subseteq S$.

[T.3.13] Si $\mathbf{Gtd}(X, K, S, \mu)$ entonces $\sim \mathbf{Inhom}(X, K)$.

Este teorema es obvio a partir de T.3.7 y las definiciones relevantes.

[T.3.14] Si **Gtd** (X, K, S, μ) entonces $S \subseteq s's'\mu$ y $\mathbf{F}_K(X) \subseteq s's'\mu$.

Este teorema se prueba a partir de D.3.4 y D.3.5.

[T.3.15] Si **Gtd** (X, K, S, μ) y **Gtd** (X, K, S, λ) entonces $s's'\mu \cap s's'\lambda \neq \Lambda$.

Este teorema se prueba a partir de D.3.5 y T.3.13.

[T.3.16] Si **Gtd** (X, K, S, μ) entonces $X \neq \Lambda$ y $K \neq \Lambda$ y $K \neq \Lambda$ y $\mu \neq \Lambda$.

Este teorema se prueba a partir de D.3.5, D.3.4, D.2.2, D.2.1, ver P.M.40.26.

Uno de los principales usos de la noción de tétrada genética es suministrar una base para la definición de un número de otras nociones importantes en genética. Por ejemplo, nos permite construir la siguiente definición precisa de un genotipo de una clase de equivalencia de la relación isogenérica:

[D.3.6] $$\textbf{gntp}(\mu) = \widehat{X}\{(\exists K, S) \cdot \textbf{Gtd}(X, K, S, \mu)\}.$$

Así un conjunto X es un genotipo de μ si y sólo si, es el primer término de cualquier tétrada genética de la que μ es el último término. Similarmente, los ecotipos de μ se definen como sigue:

[D.3.7] $$\textbf{ectp}(\mu) = \widehat{K}\{(\exists X, S) \cdot \textbf{Gtd}(X, K, S, \mu)\}.$$

Un ecotipo de μ es así el segundo término de una tétrada genética de la que μ es el último término.

Podemos definir también el *sistema genético* especificado o determinado por una clase de equivalencia μ de la relación isogenérica. Este es el conjunto de todos los conjuntos que son genotipos de μ, o ecotipos de μ, o unidades de fenotipo de μ:

[D.3.8] $$\textbf{Gsyst}(\mu) = \widehat{X}\{(\exists Y, K, S) \cdot \textbf{Gtd}(Y, K, S, \mu) \cdot X = Y \text{ o } X = K \text{ o } X = S\}.$$

Con fines de ilustración se da a continuación un ejemplo imaginario de un sistema genético simple. El sistema consta de los cuatro genotipos, los tres ecotipos y las doce unidades de fenotipos de un conjunto μ. Los otros conjuntos mencionados están envueltos en la estructura del sistema sin estar incluidos en él, de acuerdo con la anterior definición. Se muestra también la **F**-matriz del sistema. A partir de ella pueden construirse las tétradas genéticas del sistema. Nótese que una unidad de fenotipo dada no puede ocurrir más que una vez en la misma **F**-matriz. Ello es una consecuencia del Teorema T.3.9. También, se verá a partir de T.3.16 que el conjunto vacío no puede pertenecer a un sistema genético en el sentido anterior.

Un ejemplo imaginario de un sistema **Pd***-genético.*

El conjunto determinante μ es una clase de equivalencia de la relación isogenérica.

1. $\mu = \{f, g, h\}$.

2. $f = \{P_1, P_2\}$; $g = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$; $h = \{R_1, R_2\}$ (familias fenotípicas).

3. **psc** $(\mu) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$ (unidades de fenotipo).

   $S_1 = (P_1Q_1R_1)$, $S_2 = (P_1Q_1R_2)$, $S_3 = (P_1Q_2R_1)$, $S_4 = (P_1Q_2R_2)$,
   $S_5 = (P_1Q_3R_1)$, $S_6 = (P_1Q_3R_2)$, $S_7 = (P_2Q_1R_1)$, $S_8 = (P_2Q_1R_2)$,
   $S_9 = (P_2Q_2R_1)$, $S_{10} = (P_2Q_2R_2)$, $S_{11} = (P_2Q_3R_1)$, $S_{12} = (P_2Q_3R_2)$.*

4. Los genotipos de μ, **Gntp** $(\mu) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

5. Los ecotipos de μ, **ectp** $(\mu) = \{K_1, K_2, K_3\}$.

6. La **F**-matriz de μ:

F	X_1	X_2	X_3	X_4
K_1	S_1	S_7	S_2	S_8
K_2	S_3	S_9	S_4	S_{10}
K_3	S_5	S_{11}	S_6	S_{12}

7. La suma de μ: $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2\}$.

8. La suma de la suma de μ: $(P_1 \cup P_2 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup R_1 \cup R_2)$.

En § 2 de este capítulo, se introdujo la noción de par de conjuntos mutacionales al clasificar los pares de conjuntos genéticos como (i) infértiles; (ii) inhomogéneos; (iii) hereditarios; o (iv) mutacionales. Los pares mutacionales eran aquellos para los que el valor de la función $\mathbf{F}_K(X)$ no estaba incluido en X sino en el complemento de X, esto es $\overline{X}$.

Debemos introducir ahora una relación entre conjuntos en la cual sea especificado más exactamente el conjunto en el que son reunidos los vástagos por el proceso mutacional. Ello requiere una relación de tres términos. Escribiremos: '**Mut** (X, K, Y)' por 'X con K se muda en Y'; la definición formal es como sigue:

[D.3.9] $\quad \mathbf{Mut} = \widehat{X}\widehat{K}\widehat{Y}\{\mathbf{F}_K(X) \neq \Lambda . \mathbf{F}_K(X) \subseteq Y \cdot X \cap Y = \Lambda\}$.

Con la ayuda de esta noción general podemos definir ahora tres relaciones de dos términos que son todas mutacionales en el sentido anterior, pero se distinguen de acuerdo con que los conjuntos parentales sean (i) unidades de fenotipos; (ii) genotipos que pertenecen al mismo sistema genético; o (iii) genotipos que pertenecen a sistemas genéticos *diferentes*. La primera clase, $\mathbf{Mut_p}$, se define como sigue:

[D.3.10] $\quad \mathbf{Mut_p} = \widehat{S}\widehat{P}\{(\exists X, K, N, \mu)$: **Gtd** $(X, K, P, \mu) \cdot$ **Gtd** $(X, N, S, \mu) \cdot P \neq S\}$.

---

* $\mathbf{P}_1 = (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6)$.

Esta relación es claramente simétrica. Con respecto a la transitividad, se presenta una complicación. Si tenemos S **Mut**$_{\mathbf{p}}$ P y P **Mut**$_{\mathbf{p}}$ Q sólo podemos inferir S **Mut**$_{\mathbf{p}}$ Q si S, perteneciendo todos los P y Q al mismo sistema genético.

La segunda clase de mutación se designa por **Mut**$_{\mathbf{g}}$ y se define así:

[D.3.11] $\mathbf{Mut_g} = \widehat{X}\,\widehat{Y}\,\{(\exists K, \mu) \cdot X, Y \mathbf{\ gentp}\,(\mu) \cdot \mathbf{Mut}\,(X, K, Y)\}.$

La mutación de esta clase de un genotipo a otro es la clase usualmente significada por la palabra 'mutación'. Pero, como se mencionó antes, hay otra clase de mutación, a saber, cuando los dos genotipos pertenecen a sistemas genéticos *diferentes*. Designamos ésta por '**Mut**$_{\mathbf{S}}$' y la definimos como una relación entre las dos clases de equivalencia concernientes:

[D.3.12] $\mathbf{Mut_S} = \widehat{\mu}\,\widehat{\lambda}\,\{(\exists X, Y, K) \cdot X \in \mathbf{gntyp}\,(\mu) \cdot Y\ \mathbf{gntyp}\,(\lambda) \cdot \mu \neq \lambda \cdot \mathbf{Mut}\,(X, K, Y)\}$

Esta definición es importante porque, si ha de haber evolución de una especie o de un género a otro, debe ser evolución de un sistema genético a otro en el sentido anterior.*

Habiendo distinguido así estas tres clases de conjuntos mutacionales, debemos tornar ahora a los pares de individuos y considerar cómo pares sucesivos de individuos pueden ejemplificar estas clases de pares mutacionales. Podríamos llevarlo a cabo usando jerarquías incluidas en la relación de antecedente entre triplos genéticos en D.1.4; pero esto sería demasiado complicado para un comienzo, y por ello usaremos primero pares abstraídos de tales triplos genéticos. Tales pares genéticos de individuos pueden definirse como sigue:

[D.3.13] $\mathbf{Gp} = \widehat{x}\,\widehat{y}\,\{(\exists z) \cdot \mathbf{Off}\,(x, y, z)\}.$

Esta relación es de uno-a-muchos, pero no de muchos-a-uno (sobre la base de los Axiomas 3 y 4). Además, para denotar tales pares mediante $\langle x, y \rangle$ es conveniente también usar sólo letras mayúsculas de la siguiente forma:

[D.3.14] $\mathrm{R} \in \mathbf{Gp} \equiv (\exists x, y) \cdot x\ \mathbf{Gp}\ y \cdot \mathrm{R} = \langle x, y \rangle.$

Cuando se usa esta última notación, es conveniente también tener designaciones

---

* La noción de *rango ambiental* de un genotipo puede ser útil. Las siguientes definiciones son sólo provisionales y no han sido probadas todavía: En primer lugar lo que podemos llamar el rango *ambiental hereditario* de X, así llamado porque si K pertenece al rango ambiental en este sentido, entonces tenemos **Hr**(X, K):

$$\mathbf{Hrng}\,(X) = \widehat{K}\,(\exists S, \mu) \cdot \mathbf{Gtd}\,(X, K, S, \mu).$$

En segundo lugar, tenemos el rango *ambiental mutacional*:

$$\mathbf{Mrng}\,(X) = \widehat{K}\,(\exists Y) \cdot \mathbf{Mut}\,(X, K, Y).$$

Por último, tenemos el *rango infértil* de X:

$$\mathbf{Irng}\,(X) = \widehat{K}\,(X\ \mathbf{Inf}\ K).$$

El rango ambiental de X puede definirse entonces como la suma de los tres rangos especiales:

$$\mathbf{Erng}\,(X) = \widehat{K}\,\{K \in \mathbf{Hrng}\,(X) \vee K \in \mathbf{Mrng}\,(X) \vee K \in \mathbf{Irng}\,(X)\}.$$

para el miembro parental y para el miembro ambiental de un par dado; ello puede hacerse como sigue:

[D.3.15] $\mathbf{p}(\mathrm{R}) = x \equiv (\exists y) \cdot \mathrm{R} = \langle x, y \rangle \cdot \mathrm{R} \in \mathbf{Gp}.$

[D.3.16] $\mathbf{e}(\mathrm{R}) = y \equiv (\exists x) \cdot \mathrm{R} = \langle x, y \rangle \cdot \mathrm{R} \in \mathbf{Gp}.$

La relación de *predecesor inmediato* entre tales pares genéticos se define como aquella relación en la que un par está con otro cuando el miembro ambiental del primer par es el predecesor ambiental del miembro ambiental del segundo par:

[D.3.17] $\mathbf{Pr} = \widehat{R}\,\widehat{S}\{R, S\,\mathbf{Gp} \cdot \mathbf{e}(R)\,\mathbf{Ep}\,\mathbf{e}(S)\}.$

Esta relación es asimétrica, intransitiva y de uno-a-muchos. Puede probarse, para todos los valores de R y S, que si $R\,\mathbf{Pr}\,S$ entonces $\mathbf{p}(R)$ es padre por división de $\mathbf{p}(S)$. Ya que esta relación es de uno-a-muchos, su conversa es de muchos-a-uno, y consecuentemente si tomamos dos miembros cualesquiera de su campo –digamos R y S– tales que R mantenga cierto poder de **Pr** con S (esto es, S puede alcanzarse desde R en un número finito de pasos-**Pr**) sólo habrá una ruta desde S que retorne a R, y sólo una de R a S. El conjunto de todos los términos de esta ruta (incluyendo R y S) se llama el *intervalo cerrado* entre R y S con respecto a **Pr**, y se denota por $\mathbf{Pr}\,(R - S)$. (Véase *Principia Mathematica*, vol. II, p. 227).

Si limitamos el campo de **Pr** a los miembros de un intervalo tal tenemos lo que se llamará una línea-**Pr**.*

[D.3.18] línea-$\mathbf{Pr} = \widehat{\rho}\{(\exists R, S) \cdot R, S \in \mathbf{Gp} \cdot \rho = \mathbf{Pr}\restriction \mathbf{Pr}\,(R \rightarrowtail S)\}.$

Puesto que las líneas-**Pr** son relaciones entre pares, usaremos letras griegas como variables que tienen tales relaciones como valores, en orden a distinguir las letras tales como R y S, que tienen pares de individuos como valores. Una línea-**Pr** será claramente una relación de uno-a-uno (esto es, una que es a la vez de uno-a-muchos y de muchos-a-uno) con un primer término ($\mathrm{B}\,(\rho)$) y un último término ($\mathrm{B}\,(\breve{\rho})$).

Consideraremos ahora pares genéticos y líneas-**Pr** que son distinguibles mediante los conjuntos a los que pertenecen los individuos que los forman. El conjunto de todos los pares genéticos en los que el miembro parental pertenece al conjunto X y el miembro ambiental al conjunto K, se denota por '$(X, K)\,\mathbf{pr}$':

[D.3.19] $(X, K)\,\mathbf{pr} = \widehat{R}\{R \in \mathbf{Gp} \cdot \mathbf{p}(R) \in X \cdot \mathbf{e}(R) \in K\}.$

Por una línea (X, K)-**pr** entenderemos una línea-**Pr** en la que todo miembro de su campo es un (X, K)-par:

[D.3.20] (X, K)-$\mathbf{prln} = \widehat{\rho}\{\rho \in \text{línea-}\mathbf{Pr} \cdot (R) \cdot R \in \mathrm{C}\,(\rho) \cdot \supset \cdot R \in (X, K)\,\mathbf{pr}\}.$

---

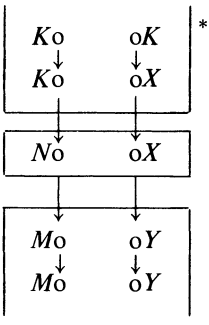
* Si R es una relación de dos términos y α es un conjunto de individuos, entonces $R\restriction \alpha$ es R con su campo limitado a α, esto es, $xR\restriction \alpha y$ si y sólo si xRy y $x \in \alpha$ e $y \in \alpha$. En D.3.18 se usa el mismo signo en conexión con **Pr**, una relación entre pares de individuos, y $\mathbf{Pr}(R \rightarrowtail S)$ que es un conjunto de pares de individuos.

Ahora bien, si dos líneas-**Pr** han de estar en una relación evolutiva recíproca, una debe preceder a la otra y debe de estar conectada de alguna forma con la otra. Además deben *diferir* mutuamente en el sentido de que hay conjuntos X, Y y K, M tales que una línea-**Pr** pertenece a (X, K)**prln** y la otra a (Y, M)**prln** y $X \cap Y = \Lambda$. Además debe haber también un conjunto N distinto de K tal que **Mut**(X, N, Y).

Debemos considerar primero los modos de conexión entre líneas-**Pr**. Una forma simple en que una línea-**Pr** ρ podría conectarse con una línea-**Pr** σ se realizaría si el último par de ρ fuese *idéntico al* (en el sentido de identidad estricta) primer par de σ. Pero si la primera línea es una línea (X, K) y la segunda una línea (Y, M), con $\mathbf{F}_K(X) \subset X$, esto sería imposible. Para propósitos evolutivos se requiere un modo de conexión algo más complicado. Le llamaremos *eslabonamiento*; y entenderemos por eslabón un único par genético. Diremos que un par tal R *eslabona* una línea-**Pr** ρ con una línea-**Pr** σ si, y sólo si, el último par de ρ es el predecesor inmediato de R, y R mismo es el predecesor inmediato del primer par de σ:

[D.3.21] $\quad \mathbf{Lnk} = \widehat{R\,\rho\,\sigma}\{R \in \mathbf{Gp} \cdot \rho,\ \sigma \in \text{línea-}\mathbf{Pr} \cdot \mathrm{B}(\breve{\rho})\,\mathbf{Pr}\,R \cdot R\ \mathbf{Pr}\ \mathrm{B}(\sigma)\}$

Ahora está claro que si ρ es una línea (X, K)**Pr** y σ es una línea (Y, M)**Pr** y $X\mathbf{Hr}_{\mathrm{f}}K$ e $Y\mathbf{Hr}_{\mathrm{f}}M$ y R eslabonan ρ a σ, entonces debe haber un conjunto N tal que $N \cap K = \Lambda$, R es un (X, N)-**pr** y **Mut**(X, N, Y). El último par es un (X, K)**pr**, y si éste precede inmediatamente a R y $\mathbf{F}_K(X) \subseteq X$, entonces el miembro parental de R debe pertenecer a X; y si R precede inmediatamente al primer miembro de σ, que pertenece a (Y, M)**pr**, entonces el miembro ambiental de R debe ser tal que con un par parental perteneciente a X, produce un vástago que pertenece a Y. De ahí la necesidad de un conjunto N tal que **Mut**(X, N, Y). Esto está ilustrado en el diagrama adjunto. Se observará que aunque debemos tener $K \neq N$, podemos tener esto con $K = M$.



Plantearemos las cuestiones: ¿Cómo contrastan recíprocamente los tres tipos de mutación desde un punto de vista evolutivo? Y ¿cuál es la presencia de lo anterior en el celebrado debate sobre la 'herencia de los caracteres adquiridos'? Se encontrará al menos una respuesta parcial a la segunda cuestión en el contraste entre $\mathbf{Mut_p}$ y $\mathbf{Mut_g}$. Supongamos que tenemos conjuntos que satisfacen las condiciones siguientes: **Gtd**(X, K, S, μ) y **Gtd**(X, N, P, μ). Entonces por T.3.12 y T.3.8 tendremos $\mathbf{F}_K(S) \subseteq S$ y $\mathbf{F}_N(P) \subseteq P$, y también $\mathbf{F}_N(S) \subseteq P$ y $\mathbf{F}_K(P) \subseteq S$. Tenemos así dos unidades de fenotipos y dos ambientes; cada unidad persiste en las generaciones sucesivas con un conjunto ambiental y se muda en la otra

* Se entenderá que la flecha del lado izquierdo en este diagrama representa la relación **Ep** entre los miembros ambientales de los pares, y la flecha del lado derecho representa la relación **Pd** entre los miembros parentales. El miembro ambiental de cualquier par dado es el ambiente del miembro parental del par que le sigue inmediatamente.

unidad con el otro conjunto ambiental. Tenemos así un ejemplo de $\mathbf{Mut_p}$ con el genotipo X constante.

Como muestra el diagrama adjunto, en el caso de $\mathbf{Mut_p}$ podemos tener una línea-**Pr** con los rasgos siguientes. Los miembros parentales de los pares constituyentes pertenecen todos al genotipo X, pero pueden ser miembros de una unidad de fenotipo S o P de acuerdo con la clase y posición del ecotipo. Si tenemos una larga sucesión de K ésta se acompañará con una larga sucesión de S, y habrá una larga sucesión de N acompañada por P. Sólo cuando ocurra una interrupción en la sucesión ambiental habrá una interrupción en la sucesión de la unidad de fenotipo. Habrá oscilación pero no evolución. Sólo con $\mathbf{Mut_g}$ habrá largos periodos sin cambio; y el cambio, cuando ocurra, tendrá poca probabilidad de oscilación. El tercer tipo –$\mathbf{Mut_s}$– parece ofrecer la mejor oportunidad para pasos evolutivos importantes sin oscilación.

Ko	o$X \cap S$
↓	↓
Ko	o$X \cap S$
↓	↓
Ko	o$X \cap S$
↓	↓
No	o$X \cap S$
↓	↓
No	o$X \cap P$
↓	↓
No	o$X \cap P$
↓	↓
No	o$X \cap P$
↓	↓
Ko	o$X \cap S$
↓	↓
Ko	o$X \cap S$
↓	↓
Ko	o$X \cap S$

Lo que se ha dicho sobre pares de conjuntos hereditarios y pares que envuelven mutación, no ha necesitado referencia alguna a pares mixtos, esto es, pares de conjuntos en que hay envueltos dos o más clases de padres o dos o más clases de ambientes, o ambas cosas. Debemos dedicar ahora algún espacio a los métodos de tratamiento de pares de conjuntos que son 'mixtos', en un sentido diferente de los pares 'inhomogéneos' definidos anteriormente. En el caso de pares inhomogéneos, los vástagos eran de dos clases: algunos que se asemejaban a los padres y otros que pertenecían al complemento del conjunto parental. Por conjuntos mixtos significaremos conjuntos que son de dos o más clases, como se verá a partir de las definiciones siguientes. En primer lugar, por un par de conjuntos *no mixto* entenderemos un par de conjuntos genéticos que pertenece a una tetrada genética:

[D.3.22] $$\mathbf{Unmx} = \widehat{X}\widehat{K}\{(\exists S, \mu)\,\mathbf{Gtd}\,(X, K, S, \mu)\}.$$

Por la suma de dos pares de conjuntos genéticos se entenderá el par cuyo primer miembro es la suma de los dos primeros miembros y cuyo segundo miembro es la suma de los dos segundos miembros, de los dos pares de conjuntos a ser sumados:

[D.3.23] $$\Sigma(\langle X, K\rangle, \langle Y, N\rangle) = \langle X \cup Y, K \cup N\rangle.$$

Diremos que un par de conjuntos es *doblemente mixto con respecto a X* si, y sólo si, es la suma de dos pares distintos *que no son mixtos*, $\langle Y, K\rangle$ y $\langle Z, K\rangle$ tales que $X \subseteq Y \cup Z$ e $Y \cap Z = \Lambda$. Así será el caso que $\langle X, K\rangle = \langle Y \cup Z, K\rangle$. Similarmente un par de conjuntos es *doblemente mixto con respecto a K* si, y sólo si, hay conjuntos M y N tales que $K \subseteq M \cup N$, $M \cap N = \Lambda$ y $\langle X, K\rangle = \langle X, M \cup N\rangle$. Podemos tener también pares de conjuntos que son doblemente mixtos con respecto a los miembros parentales *y* a los ambientales; y también pares que

son *triplemente* mixtos y así sucesivamente para un número de miembros aún mayor.

Volvemos ahora al problema de cómo expresar la ocurrencia de una *proporción* particular de miembros de un conjunto Y en otro conjunto X. Ello puede solucionarse con la ayuda de la definición siguiente:

[D.3.24] $$pY = \widehat{X}\{X \neq \Lambda \text{ y } \frac{N(X \cap Y)}{N(X)} = p \text{ y } 0 \leqslant p \leqslant 1\}.$$

Esta definición establece que 'pY' va a denotar al conjunto de todos los conjuntos de X, tales que X no sea vacío y el número de miembros de X que pertenecen a Y, dividido por el número total de miembros de X, es igual a una fracción que es igual a o mayor que cero, pero no mayor que uno. Cuando $p = 0$ tenemos $X \cap Y = \Lambda$ y cuando $p = 1$ tenemos $X \subseteq Y$.

Supongamos ahora que $\langle X, K\rangle$ es un par doblemente mixto sólo con respecto a X y que $X \in pY \cap (1 - p)Z$. Sea luego q una fracción tal que:

$$\mathbf{F}_K(X) \in pq\ \mathbf{F}_K(Y) \cap (1 - pq)\ \mathbf{F}_K(Z).$$

Si $pq = 0$ significará esto que $\mathbf{F}_K(Y) = \Lambda$ de forma que $\langle Y, K\rangle$ es un par infértil; entonces si $\langle Z, K\rangle$ es un par hereditario tendremos que $\mathbf{F}_K(X) \subseteq Z$. Pero si $\langle Z, K\rangle$ es un par mutacional en un conjunto W, entonces $\mathbf{F}(X) \subseteq W$. Pero si q está *entre* 0 y 1, pq será menor que p, y $(1 - pq)$ será mayor que $(1 - p)$, y si $\langle Y, K\rangle$ es un par hereditario, la proporción de miembros de Y en $\mathbf{F}_K(X)$ será menor que la proporción de Y en X. En el caso de que $q = 1$ tenemos

$$\mathbf{F}_K(X) \in p\mathbf{F}_K(Y) \cap (1 - p)\ \mathbf{F}_K(Z).$$

De forma que la proporción de $\mathbf{F}_K(Y)$ en $\mathbf{F}_K(X)$ es la misma que la proporción de Y en X, y un enunciado correspondiente es verdadero de Z. La proporción de Y y Z en esta generación dependerá de la clasificación de los pares $\langle Y, K\rangle$ y $\langle Z, K\rangle$. Consideremos a continuación un par $\langle X, K\rangle$ que es doblemente mixto con respecto a K y $K \in qM \cap (1 - q)N$. Sea entonces p tal que:

$$\mathbf{F}_K(X) \in pq\ \mathbf{F}_M(X) \cap (1 - pq)\ \mathbf{F}_N(X).$$

De acuerdo con los valores de p y q tendremos diferentes proporciones de miembros de $\mathbf{F}_K(X)$ que penetran en los ambientes que pertenecen a M y a N con diferentes resultados para sus vástagos, de acuerdo con las clasificaciones (hereditario, mutacional o infértil) de los pares $\langle X, M\rangle$ y $\langle X, N\rangle$.

Finalmente debemos considerar pares de conjuntos que son doblemente mixtos con respecto a los conjuntos parental y ambiental. Supongamos que $\langle X, K\rangle$ es doblemente mixto con respecto a X y K, y tendremos:

$$X \in pY \cap (1 - p)Z \quad \text{y} \quad K \in qM \cap (1 - q)N.$$

Para ilustrar nuevos desarrollos consideraremos sólo el caso en que las proporciones de los subconjuntos de $\mathbf{F}_K(X)$ son las mismas que las proporciones

de Y y Z en X, y las proporciones en que los subconjuntos $\mathbf{F}_M(X)$ y $\mathbf{F}_N(X)$ ocurren son las mismas que las proporciones de M y N en K, como se explicará más abajo. Así tendremos:

$$\mathbf{F}_K(X) \in p\mathbf{F}_K(Y) \cap (1 - p)\,\mathbf{F}_K(Z),$$
$$\mathbf{F}_K(Y) \in q\mathbf{F}_M(Y) \cap (1 - q)\,\mathbf{F}_N(Y) \text{ y}$$
$$\mathbf{F}_K(Z) \in q\mathbf{F}_M(Z) \cap (1 - q)\,\mathbf{F}_N(Z).$$

Con la ayuda del lema siguiente podemos combinar estas fórmulas en una:

Si $A \in pB$ y $B \in qC$ y $B \subseteq A$ y $C \subseteq B$ entonces $A \in pqC$.

Ponemos '$\mathbf{F}_K(X)$' por 'A', '$\mathbf{F}_K(Y)$' por 'B' y '$\mathbf{F}_M(Y)$' por 'C', y siendo satisfechas las condiciones del lema de acuerdo con las definiciones relativas a 'doblemente mixto' podemos obtener:

$$\mathbf{F}_K(X) \in pq\,\mathbf{F}_M(Y).$$

Aplicando el mismo procedimiento a los otros subconjuntos de $\mathbf{F}_K(X)$ obtenemos finalmente:

$$\mathbf{F}_K(X) \in pq\mathbf{F}_M(Y) \cap p(1-q)\,\mathbf{F}_N(Y) \cap q(1-p)\,\mathbf{F}_M(Z) \cap (1-p)(1-q)\,\mathbf{F}_N(Z).$$

Para derivar las proporciones de Y y Z en $\mathbf{F}_K(X)$ necesitamos conocer la F-matriz para $\mathbf{F}_K(X)$. En el presente caso las posibles matrices caen en cuatro grupos: (i) uno con cada cuadrado ocupado por 'Y'; (ii) uno con cada cuadrado ocupado por 'Z'; (iii) aquéllos con un representante de uno de estos conjuntos y tres representantes de otro; (iv) aquéllos con números iguales de 'Y' y 'Z'. Tomaremos un ejemplo de la tercera y cuarta clase.

M1.

F	Y	Z
M	Y	Z
N	Z	Z

M2.

F	Y	Z
M	Y	Z
N	Z	Y

Con M.1, ya que $\mathbf{F}_M(Y) \subseteq Y$ y todos los restantes subconjuntos de $\mathbf{F}_K(X)$ están incluidos en Z, tendremos:

$$\mathbf{F}_K(X) \in pq\ Y \cap (1 - pq)\,Z.$$

Comparadas consecuentemente con las proporciones de X, las proporciones de Y han decrecido y las de Z se han incrementado. Suponiendo que $p = q = 1/2$, tendremos $X \in 1/2\ Y \cap 1/2\,Z$ y $\mathbf{F}_K(X) \in 1/4\ Y \cap 3/4\,Z$.

Con M.2 tenemos $\mathbf{F}_M(Y)$ y $\mathbf{F}_N(Z)$ incluidos en Y y los dos subconjuntos restantes incluidos en Z, en consecuencia obtendremos:

$$\mathbf{F}_K(X) = (1 - p - q + 2pq)\ Y \cap (p + q - 2pq)\,Z$$

y si $p = q = 1/2$, esto significará: $\mathbf{F}_K(X) \in 1/2\, Y \cap 1/2\, Z$; de forma que $\mathbf{F}_K(X)$ tiene Y y Z en las mismas proporciones en que ellas ocurren en X.

Para más información sobre el uso de conjuntos mixtos en conexión con la evolución, el lector puede consultar el artículo del autor titulado *Theorems on Random Evolution*, publicado en el Bulletin of Mathematical Biophysics, volumen 27, 1965, edición especial.

Concluiremos este capítulo con un sumario muy breve de nuestro sistema de **Pd**-genética. Con la sola ayuda de tres nociones simples no definidas y siete axiomas aparentemente no controvertibles, hemos podido dar definiciones precisas de una serie de nociones genéticas básicas, y probar un número de teoremas a los que nos vemos abocados si adoptamos los axiomas y las definiciones. Es de esperar que algunos biólogos que estén interesados en este aspecto de su trabajo se vean estimulados a desarrollar algo más el sistema. Al hacerlo estarán colaborando a hacer por la biología, o al menos por una parte de la biología, lo que Euclides, hace muchas centurias, hizo por la geometría. Debe subrayarse que este sistema todavía no ha sido desarrollado demasiado, y que las consecuencias de la definición D.3.8 en particular, no han sido en absoluto cabalmente investigadas. Pero se inserta aquí en espera de que otros se comprometan a una posterior exploración del posible sistema genético que aquí ha sido definido. En el capítulo siguiente, se aplicará lo que se ha aprendido sobre la **Pd**-genética al estudio de la **Ps**-genética, la genética del parentesco sexual.

CAPITULO V

Una nueva visión de la genética de los gametos.

En este capítulo desarrollaremos un sistema axiomático para parte de la genética de los gametos. Hablamos de una parte porque no intentamos llegar a la determinación del sexo o a ocuparnos de los cromosomas sexuales o de partes de cromosomas. Esperamos ofrecer una nueva perspectiva mediante el uso de relaciones poliádicas (supuesta la salvaguardia contra la abstracción involuntaria) y también mediante el uso de clases de equivalencia de relaciones simétricas y transitivas. Esperamos también que este sistema parcial sirva de ejemplo de los métodos empleados y capacite a los expertos para aplicar estos métodos a los tópicos omitidos.

El sistema axiomático.

Para obviar la necesidad de enfrentarnos con demasiadas complicaciones a la vez, dividiremos en dos conjuntos los signos no definidos y desarrollaremos el sistema hasta donde podamos con el primer conjunto, antes de introducir el segundo. El primer conjunto se compone de los siete miembros siguientes.

Snd.1 **biontc**: conjunto de todos los *biontes completos*, es decir, el conjunto de todos los organismos vivos extendidos en el tiempo que no continúan para formar un bionte de mayor longitud temporal, sino que terminan en un cuerpo muerto.

Snd.2 ♂: el conjunto de todos los gametos masculinos.

Snd.3 ♀: el conjunto de todos los gametos femeninos.

Snd.4 **En**: la relación entre un ambiente y el bionte completo, o el gameto, *del cual* es el ambiente

Snd.5 **prc**: es la relación de productor de gametos; se trata de una relación triádica entre un ambiente, un bionte completo y un gameto producido por el bionte.

Snd.6 **unc**: es una relación de unión tetrádica entre un gameto masculino, uno femenino, un ambiente y un bionte completo, cuyo principio está formado por la unión de dos gametos; siendo el ambiente el del bionte.

Snd.7 **Ie**: la relación de indistinguibilidad genética entre ambientes.

Pasamos ahora a los axiomas que pueden expresarse por medio de este conjunto de signos no definidos.

[A.1] $$\mathbf{En} \in 1 \rightarrow 1.$$

Se afirma que **En** es una relación de uno-a-uno, de suerte que un ambiente sólo puede serlo de un bionte o gameto; y que un bionte o gameto no puede tener más que un ambiente.

[A.2] $$x\,\mathbf{En}y \cdot \supset \cdot x \neq y.$$

Se afirma que todo ambiente es siempre distinto de aquello a lo que sirve de ambiente. Desde el punto de vista del sentido común esta afirmación parecerá innecesaria, pero en un sistema axiomático todo debe ser tan explícito como sea posible.

[A.3] $$x\,\mathbf{En}y \cdot \supset \cdot y \in (\mathbf{biontc} \cup \male \cup \female).$$

Se afirma que todo ambiente (en este sistema) es un ambiente de un bionte completo o de un gameto masculino o de uno femenino.

[A.4] $$y \in (\mathbf{biontc} \cup \male \cup \female) \cdot \supset \cdot (\exists x) \cdot x\,\mathbf{En}y.$$

Se afirma que todo bionte completo o gameto masculino o femenino tiene un ambiente.

[A.5] $$\mathbf{Ie} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}.$$

Se afirma que la relación **Ie** es simétrica y transitiva.

[A.6] $$x\,\mathbf{Ie}y \cdot \supset \cdot (\exists z, w) \cdot x\,\mathbf{En}z \cdot y\,\mathbf{En}w.$$

Se nos dice meramente que si dos objetos están entre sí en la relación **Ie**, son ambientes de algo. El Axioma 3 nos indica qué es ese algo.

[A.7] $$\mathbf{prc}\,(x, y, z) \cdot \supset \cdot x\,\mathbf{En}y \cdot y \in \mathbf{biontc} \cdot z \in (\male \cup \female).$$

Aquí se nos enseña que el primer término de esta relación es el ambiente del segundo; y que el tercer término es un gameto masculino o femenino.

[A.8] $$\mathbf{prc}\,(x, y, z) \cdot \mathbf{prc}\,(u, v, z) \cdot \supset \cdot y = v.$$

Este axioma nos dice que si el último término de una instancia de esta relación es estrictamente idéntico al último de otra instancia, entonces el segundo término de aquél es también idéntico al segundo de éste. Con la ayuda de esta información, y usando los Axiomas 1 y 7, podemos probar que $x = u$, y por tanto no es necesario añadir esto al Axioma 8. Pero de todo ello podemos ver que **prc** es una relación funcional en la que z es la variable independiente y las dos variables restantes son las dependientes. (Véase el diagrama correspondiente en p. 152, n. 3).

[A.9] $$\mathbf{unc}\,(x, y, z, w) \cdot \supset \cdot x \in \male \cdot y \in \female \cdot z\,\mathbf{En}w \cdot w \in \mathbf{biontc}.$$

Este es el axioma que corresponde a **unc** como el Axioma 7 a **prc**; nos dice qué objetos pueden ser valores de las cuatro variables.

[A.9a] $$♂ \cap ♀ = \Lambda.$$

Se afirma que los conjuntos de gametos masculinos y femeninos no tienen ningún miembro común.

[A.10] $$\mathbf{unc}(x, y, z, w) \cdot \mathbf{unc}(x', y', z', w) \cdot \supset \cdot x = x' \cdot y = y' \cdot z = z'.$$

Se nos dice que **unc** es una relación funcional en la que la cuarta variable puede ser la variable independiente. Con la ayuda de los Axiomas 1 y 10 es fácil probar que si se le asigna un valor al tercer término en esta relación, entonces los valores de los restantes quedan fijados. Probaremos esto cuando lleguemos a los teoremas. Los axiomas que se dan a continuación sirven para establecer axiomáticamente que para los dos primeros términos de la relación **unc** valen los enunciados correspondientes.

[A.11] $$\mathbf{unc}(x, y, z, w) \cdot \mathbf{unc}(x', y, z', w') \cdot \supset \cdot x = x' \cdot z = z' \cdot w = w'.$$

[A.12] $$\mathbf{unc}(x, y, z, w) \cdot \mathbf{unc}(x, y', z', w') \cdot \supset \cdot y = y' \cdot z = z' \cdot w = w'.$$

Los anteriores axiomas parecen bastar para el conjunto de signos no definidos introducidos hasta ahora. Volvemos por lo tanto ahora a algunos de los conceptos importantes que pueden ser definidos en el sistema con la ayuda de estos mismos signos no definidos. La primera definición explica qué debe entenderse por el conjunto de *tétradas genéticas* que se denotan por el signo '**gtet**'. (Obsérvese que lo que aquí se llama tétrada genética es completamente diferente de lo que se solía designar con las mismas palabras en el Capítulo IV).

[D.1] $$\mathbf{gtet} = \widehat{A}\{(\exists x, y, z, w) \cdot \mathbf{unc}(x, y, z, w) \cdot A = \langle x, y, z, w\rangle\}.$$

Se nos dice que A es una tétrada genética si, y sólo si, existen cuatro términos, x, y, z, w, que están entre sí en la relación de unión **unc**, en el orden indicado, y A es el conjunto ordenado de estos términos en el mismo orden. (Cf. p. 152, n. 3).

Dada una tétrada genética A, podemos construir una notación útil para sus miembros de la siguiente forma, sin perder de vista que por los Axiomas 1, 10, 11 y 12, cada variable en una tétrada dada puede tener uno y sólo un valor:

[D.2] $$A_1 = (\imath x)\{(\exists y, z, w) \cdot A \in \mathbf{gtet} \cdot A = \langle x, y, z, w\rangle\}.$$

Esta definición (usando la notación de los *Principia Mathematica*) afirma que 'A_1' denota el único primer término en una tétrada genética A. Las tres próximas definiciones sirven para los tres términos restantes.

[D.3] $$A_2 = (\imath y)\{(\exists x, z, w) \cdot \mathbf{unc}(x, y, z, w) \cdot A = \langle x, y, z, w\rangle\}.$$

[D.4] $$A_3 = (\imath z)\{(\exists x, y, w) \cdot \mathbf{unc}(x, y, z, w) \cdot A = \langle x, y, z, w\rangle\}.$$

[D.5] $$A_4 = (\imath w)\{(\exists x, y, z) \cdot \mathbf{unc}(x, y, z, w) \cdot A = \langle x, y, z, w\rangle\}.$$

Ahora resulta posible probar los siguientes teoremas:

[T.1] $\mathbf{prc}\,(x, y, z) \cdot \mathbf{prc}\,(u, v, z) \cdot \supset \cdot x = u \cdot y = v$ (por Axiomas 1, 7 y 8).

Esto se había indicado bajo el Axioma 8.

[T.1a] $\mathbf{unc}\,(x, y, z, w) \cdot \mathbf{unc}\,(x', y', z, w') \cdot \supset \cdot x = x' \cdot y = y' \cdot w = w'.$

Esto se había mencionado bajo el Axioma 10. Su prueba requiere los Axiomas 1 y 9.

[T.2] $A \in \mathbf{gtet} \cdot \supset \cdot \mathbf{unc}\,(A_1, A_2, A_3, A_4)$ (por Definiciones 1 a 5).

[T.3] $\mathbf{unc}\,(A_1,A_2,A_3,A_4) \cdot \mathbf{unc}\,(B_1,B_2,B_3,B_4) \cdot A_1 = B_1 \vee A_2 = B_2 \vee A_3 = B_3 \cdot \supset \cdot A = B.$

Esto puede probarse por Axiomas 10, 11 y 12, Teorema 1a y Definiciones 2 a 5.

Combinando T.1a y T.2, obtenemos:

[T.4] $A, B \in \mathbf{gtet} \cdot A_1 = B_1 \vee A_2 = B_2 \vee A_3 = B_3 \cdot \supset \cdot A = B.$

Definimos ahora algunas relaciones importantes entre tétradas genéticas, y en primer lugar una a la que podemos llamar la *relación predecesor*:

[D.6] $\mathbf{prd} = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\,\{A, B, C \in \mathbf{gtet} \cdot \mathbf{prc}\,(A_3, A_4, C_1) \cdot \mathbf{prc}\,(B_3, B_4, C_2)\}.$

Se afirma que los tres miembros de un triplo A, B, C, de tétradas genéticas, están entre sí en una relación predecesor si, y sólo si, A_3 y A_4 son los productores de C_1 (el gameto masculino de C), y B_3 y B_4 son los productores de C_2 (el gameto femenino de C). (Véase el diagrama correspondiente en la p. 152, n. 3).

[T.5] $\mathbf{prd}\,(A, B, C) \cdot \mathbf{prd}\,(A', B', C) \cdot \supset \cdot A = A' \cdot B = B'.$

Esto se prueba fácilmente puesto que por la Definición 6 el antecedente implica:

$$\mathbf{prc}\,(A_3, A_4, C_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{prc}\,(A'_3, A'_4, C_1)$$

y de aquí por T.1 tenemos: $A_3 = A'_3$ y $A_4 = A'_4$. El antecedente de T.5 junto con D.6 implica asimismo: $A \in \mathbf{gtet}$, y de ello y T.2 tenemos: $\mathbf{unc}\,(A_1, A_2, A_3, A_4)$ y $\mathbf{unc}\,(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$; y de ello y T.4 obtenemos: $A = A'$. De forma totalmente análoga obtenemos además: $B = B'$.

La próxima definición es también una relación triádica entre tétradas genéticas, y es útil cuando la relación **Ie** es susceptible de ser abstraída, a fin de que no se olvide ni sea ignorada la parte que toma en lo que está aconteciendo.

[D.7] $\mathbf{EI} = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\,\{(A, B, C \in \mathbf{gtet} \cdot A_3 \mathbf{Ie} B_3 \cdot B_3 \mathbf{Ie} C_3)\}.$

Esta es una relación en la que están entre sí las tétradas genéticas A, B y C cuando el miembro ambiental de A es genéticamente indistinguible del miembro correspondiente de B, y este último es también genéticamente indistinguible del miembro ambiental de C. De esta definición, con la ayuda de A.5, se ve fácilmente que se sigue el siguiente teorema:

[T.6] $\mathbf{EI}(A, B, C) \supset A_3 \mathbf{Ie} C_3$.

El siguiente teorema se prueba también fácilmente a partir de la definición.

[T.7] $\mathbf{EI}(A, B, C) \cdot \mathbf{EI}(C, D, E) \cdot \supset \cdot \mathbf{EI}(A, C, E) \cdot \mathbf{EI}(B, C, D)$.

Ahora definimos una relación, denotada por '**cop**', que se da entre dos tétradas genéticas cuando tienen los mismos predecesores:

[D.8] $\mathbf{cop} = \widehat{C}\,\widehat{D}\{(\exists A, B) \cdot \mathbf{prd}(A, B, C) \cdot \mathbf{prd}(A, B, D)\}$.

Es fácil probar entonces el siguiente teorema con la ayuda de D.8 y T.5:

[T.8] $\mathbf{cop} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}$.

A continuación definimos así la expresión '**suc** (A, B)' (sucesores de A y B) denotativa del conjunto de todas las tétradas genéticas que tienen a A y a B como sus predecesores:

[D.9] $\mathbf{suc}(A, B) = \widehat{C}(\mathbf{prd}(A, B, C))$.

Con esta definición y con la ayuda de D.8, podemos probar el siguiente teorema:

[T.9] $\mathbf{suc}(A, B) \in \mathrm{Equ}(\mathbf{cop})$.

Dem.: (i) Si C y D son miembros de **suc** (A, B), entonces, por D.9 tenemos:

prd (A, B, C) y **prd** (A, B, D).

(ii) De la consecuencia de la línea (i) y D.8, tenemos:

C **cop** D.

(iii) Si C y D pertenecen a **suc** (A, B), entonces C **cop** D (por (i) y (ii)).

(iv) Si $C \in$ **suc** (A, B) y C **cop** D, entonces **prd** (A, B, D) por D.8.

(v) Si $C \in$ **suc** (A, B), entonces $D \in$ **suc** (A, B) si, y sólo si, C **cop** D.

La línea (v) se sigue de las líneas (ii) y (iv) y muestra que **suc** (A, B) es una clase de equivalencia de **cop**.

Parece que hemos alcanzado un punto más allá del cual no podemos continuar de forma provechosa sin la ayuda de más signos no definidos. Vamos por lo tanto a enumerar los cinco miembros del segundo conjunto de tales signos; todos ellos son concernientes a partes de los gametos.

Snd.8 La relación **aut** es la relación en que está un autosoma con un gameto cuando es un autosoma que es una parte de ese gameto.

Snd.9 **Ia** es la relación de indistinguibilidad genética entre autosomas.

Snd.10 **cor** es una relación de correspondencia. Cuando comparamos una cosa con otra, comparamos *partes correspondientes*. **cor** es la relación de correspondencia entre autosomas de distintos gametos, o de un autosoma consigo mismo.

Snd.11 **cyt** es la relación entre un citoplasma y el gameto del cual es el citoplasma.
Snd.12 **Icy** es la relación de indistinguibilidad genética entre los citoplasmas de gametos.

Los axiomas que gobiernan el uso de estos signos no definidos son los siguientes:

[A.13] $$x\,\mathbf{aut}\,y \cdot \supset \cdot y \in (♂ \cup ♀).$$

Ello requiere en el presente sistema, que si x es un autosoma de y, entonces y es un gameto masculino o femenino.

[A.14] $$y \in (♂ \cup ♀) \cdot \supset \cdot (\exists x) \cdot x\,\mathbf{aut}\,y.$$

Se afirma simplemente que cada gameto tiene por lo menos un autosoma.

[A.15] $$\mathbf{aut} \in \mathrm{cls} \rightarrow 1.$$

Se establece que **aut** es una relación de muchos-a-uno, de modo que un autosoma no puede ser un autosoma de más de un gameto.

[A.16] $$u\,\mathbf{Ia}\,v \cdot \supset \cdot (\exists x, y) \cdot u\,\mathbf{aut}\,x \cdot v\,\mathbf{aut}\,y.$$

Si u y v son autosomas genéticamente indistinguibles, entonces existe un gameto x del cual u es un autosoma, y un gameto y del cual v es un autosoma.

[A.17] $$u\,\mathbf{aut}\,x \cdot v\,\mathbf{aut}\,x \cdot u\,\mathbf{Ia}\,v \cdot \supset \cdot u = v.$$

Este sistema requiere (como se indica en este axioma) que si u es un autosoma de x, y v es un autosoma del mismo gameto x, y si u es genéticamente indistinguible de v, entonces ha de ser estrictamente idéntico a v, i.e. uno y el mismo autosoma.

[A.18] $$\mathbf{Ia} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}.$$

Al igual que las otras relaciones de indistinguibilidad, **Ia** es simétrica y transitiva.

[A.19] $$u\,\mathbf{cor}\,v \cdot \supset \cdot (\exists x, y) \cdot u\,\mathbf{aut}\,x \cdot v\,\mathbf{aut}\,y.$$

Se afirma que cuando tenemos $u\,\mathbf{cor}\,v$, entonces existe un gameto x del cual u es un autosoma, y un gameto y del cual v es un autosoma.

[A.19a] $$u\,\mathbf{aut}\,x \cdot v\,\mathbf{aut}\,x \cdot u\,\mathbf{cor}\,v \cdot \supset \cdot u = v.$$

Este es el análogo de A.17. Afirma que la correspondencia entre autosomas del mismo gameto implica identidad estricta.

[A.20] $$\mathbf{cor} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}.$$

La correspondencia entre autosomas es también simétrica y transitiva.

[A.21] $$x\,\mathbf{cyt}\,y \cdot \supset \cdot y \in (♂ \cup ♀).$$

Si x es el citoplasma de y, entonces, en el presente sistema, y es un gameto.

[A.21a] $$y \in (♂ \cup ♀) \cdot \supset \cdot (\exists x) \cdot x \mathbf{cyt} y.$$

Este es el análogo de A.14. Establece que todo gameto tiene un citoplasma.

[A.22] $$\mathbf{cyt} \in 1 \to 1.$$

La relación **cyt** es una relación de uno-a-uno, de modo que en este sistema un citoplasma es el citoplasma de uno y sólo un gameto, y un gameto tiene uno y sólo un citoplasma.

[A.23] $$\mathbf{Icy} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}.$$

La relación de indistinguibilidad genética entre citoplasmas es simétrica y transitiva.

[A.24] $$x \mathbf{Icy} y \cdot \supset \cdot (\exists z, w) \cdot x \mathbf{cyt} z \cdot y \mathbf{cyt} w \cdot z, w \in ♂ \mathrm{v} z, w \in ♀.$$

Este último axioma establece que si x es un citoplasma que es genéticamente indistinguible de un citoplasma y, entonces existen gametos z y w tales que x es el citoplasma de z e y es el citoplasma de w, y z y w son ambos masculinos o ambos femeninos.

Antes de exponer las definiciones que usan signos no definidos pertenecientes al segundo conjunto, debemos decir algo sobre la intención de las mismas. Dichas definiciones pretenden ayudarnos a abordar la siguiente cuestión: dado un triplo de tétradas genéticas A, B, C, que están en la relación **prd** (A, B, C), ¿qué es preciso saber acerca de A y B para estar en disposición de inferir algo acerca de C? La respuesta general es que necesitamos saber en qué relación de indistinguibilidad genética están entre sí los autosomas correspondientes de los correspondientes gametos A y B; similar información necesitamos respecto a sus citoplasmas; asimismo hemos de tener información acerca de los ambientes de A, B y C, y finalmente, necesitamos saber qué relación de segregación mantienen tres tétradas entre sí. Las definiciones que siguen pretenden proporcionar los medios para expresar tal información y mostrar cómo nos lleva hasta la información sobre la tétrada C.

[D.10] $$\mathbf{cautrel} = \widehat{u}\,\widehat{x}\,\widehat{y}\,\widehat{v}\,(u \mathbf{aut} x \cdot u \mathbf{cor} v \cdot v \mathbf{aut} y).$$

Esta es una relación tetrádica entre un autosoma u y dos gametos x e y, y un segundo autosoma v, que se mantiene entre ellos cuando u es un autosoma de x y está en **cor** con v que es un autosoma de y. He aquí algunos teoremas concernientes a esta relación:

[T.10] $$\mathbf{cautrel}\,(u, x, y, v) \cdot \mathbf{cautrel}\,(u, z, w, v) \cdot \supset \cdot x = z \cdot y = w.$$

Esto se prueba fácilmente por medio de D.10 y A.15; si tenemos $u \mathbf{aut} x$ y $u \mathbf{aut} z$, entonces, por A.15 debemos tener $x = z$; y correlativamente, a partir de $v \mathbf{aut} y$ y $v \mathbf{aut} w$ tenemos $y = w$.

[T.11] $$\textbf{cautrel}\,(u, x, y, v) \cdot u \neq v \cdot \supset \cdot x \neq y.$$

Esto se prueba por D.10 y A.19a.

[T.12] $$\textbf{cautrel}\,(u, x, y, v) \cdot \textbf{cautrel}\,(u, x, y, w) \cdot \supset \cdot v = w.$$

Del antecedente y D.10 tenemos:

$$u\,\textbf{cor}\,v \quad \text{y} \quad u\,\textbf{cor}\,w$$

y dado que **cor** es simétrica y transitiva (A.20), de aquí tenemos:

$$v\,\textbf{cor}\,w.$$

También por D.10 tenemos:

$$v\,\textbf{aut}\,y \quad \text{y} \quad w\,\textbf{aut}\,y.$$

De los dos últimos resultados y con la ayuda del A.19a tenemos:

$$v = w.$$

[T.13] $$\textbf{cautrel}\,(u, x, y, v) \cdot \textbf{cautrel}\,(w, x, y, v) \cdot \supset \cdot u = w.$$

Esto se prueba de forma análoga a la usada para T.12.

De la relación tetrádica **cautrel**, podemos derivar la siguiente relación diádica.

[D.11] $$\textbf{caut}\,(x, y) = \hat{u}\,\hat{v}\{(\textbf{cautrel}\,(u, x, y, v))\}.$$

Esta relación tiene, como veremos, numerosos usos. Primero tenemos algunos teoremas sobre la relación misma:

[T.14] $u\,\textbf{caut}\,(x, y)\,v \cdot u\,\textbf{caut}\,(x, y)\,w \cdot \supset \cdot v = w$ (por D.11 y T.12).

[T.15] $u\,\textbf{caut}\,(x, y)\,v \cdot w\,\textbf{caut}\,(x, y)\,v \cdot \supset \cdot u = w$ (por D.11 y T.13).

[T.16] $$\textbf{caut}\,(x, y) \in 1 \rightarrow 1.$$

Esto se prueba a partir de T.14 y T.15, ya que T.14 muestra que la relación **caut** (x, y) es una relación de muchos-a-uno, y T.15 que es una relación de uno-a-muchos, y una relación que es simultáneamente de muchos-a-uno y de uno-a-muchos, es, por definición, una relación de uno-a-uno, o $1 \rightarrow 1$.

[T.17] $$u\,\textbf{caut}\,(x, y)\,v \cdot \supset \cdot v\,\textbf{caut}\,(y, x)\,u.$$

Esto está claro a partir de D.10 y D.11.

[T.18] $$\textbf{caut}\,(x, y) \mid \textbf{caut}\,(y, z) \subset \textbf{caut}\,(x, z).$$

Esto se prueba también a partir de D.10 y D.11.

[T.19] $$\textbf{caut}\,(x, y) \subset \textbf{Ia} \cdot \textbf{caut}\,(y, z) \subset \textbf{Ia} \cdot \supset \cdot \textbf{caut}\,(x, y) \mid \textbf{caut}\,(y, z) \subset \textbf{Ia}.$$

Esto requiere A.18.

Pasamos ahora a las relaciones de indistinguibilidad entre gametos. Como preparación a ello introducimos una relación que combina la correspondencia entre autosomas con la indistinguibilidad genética.

[D.12] $$\mathbf{CA} = \widehat{u}\,\widehat{v}\,(u\,\mathbf{cor}\,v \cdot u\,\mathbf{Ia}\,v).$$

[T.20] $\mathbf{CA} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}$ (por D.12, A.18 y A.20).

Definimos ahora una relación designada por '**Iag**' que es una relación de indistinguibilidad genética entre gametos que es aplicable a pares de gametos del mismo sexo y también a pares cuyos miembros sean de sexos diferentes. Necesitamos también una definición de una expresión que denote al conjunto de todos los autosomas de un gameto dado:

[D.13] $$\mathbf{auts}\,(x) = \widehat{u}\,\{(u\,\mathbf{aut}\,x)\}.$$

[D.14] $$\mathbf{Iag} = \widehat{x}\,\widehat{y}\,\{\mathbf{auts}\,(x) \subset CA\text{“}\,\mathbf{auts}\,(y) \cdot \mathbf{auts}\,(y) \subset CA\text{“}\,\mathbf{auts}\,(x) \cdot \mathbf{auts}\,(x) \neq \Lambda\}.$$

Se establece que un gameto x es autosómicamente indistinguible de un gameto y si, y sólo si, cada autosoma de x está en la relación **CA** (i.e. corresponde a, y es genéticamente indistinguible de) con un autosoma de y; y cada autosoma de y está en la relación **CA** con un autosoma de x; y el conjunto de autosomas de x no es nulo.

[T.21] $$u\,\mathbf{auts}\,(x)\,\restriction\,\mathbf{CA}\,\restriction\,\mathbf{auts}\,(y)\,v \cdot \supset \cdot u\,\mathbf{aut}\,x \cdot u\,\mathbf{CA}\,v \cdot v\,\mathbf{aut}\,y.$$

[T.22] $$\mathbf{auts}\,(x)\,\restriction\,\mathbf{CA}\,\restriction\,\mathbf{auts}\,(y) \mid \mathbf{auts}\,(y)\,\restriction\,\mathbf{CA}\,\restriction\,\mathbf{auts}\,(z) \subset \mathbf{auts}\,(x)\,\restriction\,\mathbf{CA}\,\restriction\,\mathbf{auts}\,(z).$$

[T.23] $$\mathbf{auts}\,(x)\,\restriction\,\mathbf{CA}\,\restriction\,\mathbf{auts}\,(y) \in 1 \to 1.$$

Volviendo ahora a los gametos, exponemos el siguiente e importante teorema: la prueba es bastante complicada y por ello se la dará en una nota al final de este capítulo* para no interrumpir la exposición del sistema.

[T.24] $$\mathbf{Iag} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}.$$

Al ser esta relación simétrica y transitiva, dará lugar a clases de equivalencia que serán clases de gametos tales que si tomamos dos miembros cualesquiera de la misma clase de equivalencia, todo autosoma de uno corresponderá a uno y sólo un autosoma del otro, y todos los autosomas correspondientes serán genéticamente indistinguibles.

La relación **Iag** no dice nada sobre los citoplasmas y puede por lo tanto ser aplicada a gametos de diferente sexo. Para poder definir la indistinguibilidad genética entre gametos debemos tener en cuenta una relación que se da entre dos gametos cuando sus citoplasmas son genéticamente indistinguibles.

[D.15] $$\mathbf{Icg} = \widehat{x}\,\widehat{y}\,\{(\exists u, v) \cdot u\,\mathbf{cyt}\,x \cdot v\,\mathbf{cyt}\,y \cdot u\,\mathbf{Icy}\,v\}.$$

A partir de esta definición y A.23 se puede probar el siguiente teorema:

[T.25] $$\mathbf{Icg} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}.$$

* Véase Nota 2, pp. 151-2.

La próxima definición combina **Iag** e **Icg** para proporcionar una relación que se da entre gametos cuando ambos son ♂ o ambos son ♀.

[D.16] $$\mathbf{Ig} = \hat{x}\,\hat{y}\,(x\,\mathbf{Iag}\,y \cdot x\,\mathbf{Icg}\,y).$$

Por medio de T.24 y T.25 podemos fácilmente probar que:

[T.26] $$\mathbf{Ig} \in \text{sym} \cap \text{trans}.$$

El próximo teorema requiere las Definiciones 16 y 15, y los Axiomas 22 y 24.

[T.27] $$x\,\mathbf{Ig}\,y \cdot \supset \cdot x, y \in ♂ \vee x, y \in ♀.$$

Los siguientes teoremas, concernientes a productos relativos de **Ig** e **Iag**, son útiles como lemas en las pruebas de algunos teoremas posteriores.

[T.28] $$\mathbf{Ig} \mid \mathbf{Iag} \subset \mathbf{Iag}.$$

Si tenemos $x\,\mathbf{Ig} \mid \mathbf{Iag}\,y$ existe una z tal que $x\,\mathbf{Ig}z$ y $z\,\mathbf{Iag}\,y$. A partir de $x\,\mathbf{Ig}z$ y D.16, tenemos $x\,\mathbf{Iag}z$; a partir de $x\,\mathbf{Iag}z$ y $z\,\mathbf{Iag}\,y$ obtenemos $x\,\mathbf{Iag}\,y$ por T.24.

[T.29] $\mathbf{Iag} \mid \mathbf{Ig} \subset \mathbf{Iag}$ (por D.16 y T.24).

[T.30] $\mathbf{Ig} \mid \mathbf{Iag} \mid \mathbf{Ig} \subset \mathbf{Iag}$ (por T.28 y T.29).

[T.31] $\mathbf{Iag} \mid \mathbf{Ig} \mid \mathbf{Iag} \subset \mathbf{Iag}$ (por T.29 y T.24).

[T.32] $(\mathbf{Iag} \mid \mathbf{Iag}) \cap \mathbf{Icg} \subset \mathbf{Ig}$ (por T.24 y D.16).

Nuestro próximo tópico fundamental se refiere a relaciones gaméticamente especificadas entre tétradas genéticas; pero antes de que podamos ocuparnos de él es preciso formular otra nueva definición sobre indistinguibilidad genética. Se trata de la relación de indistinguibilidad genética entre biontes completos. Hay dos de tales relaciones que han de ser definidas separadamente. Debido al hecho de que estas definiciones requieren el uso de la relación de unión tetrádica son bastante largas, pero no difíciles de entender. La primera de las dos relaciones será denotada por '**Ib**' y la segunda por '**Ibx**'.

[D.17] $$\mathbf{Ib} = \hat{x}\,\hat{y}\,\{(\exists u, v, z, u', v', z') \cdot \mathbf{unc}\,(u, v, z, x) \cdot \mathbf{unc}\,(u', v', z', y) \cdot \\ \cdot u\,\mathbf{Ig}u' \cdot v\,\mathbf{Ig}v' \cdot z\,\mathbf{Ie}z'\}.$$

[D.18] $$\mathbf{Ibx} = \hat{x}\,\hat{y}\,\{(\exists u, v, z, u', v', z') \cdot \mathbf{unc}\,(u, v, z, x) \cdot \mathbf{unc}\,(u', v', z', y) \cdot \\ \cdot u\,\mathbf{Iag}v' \cdot v\,\mathbf{Iag}u' \cdot u\,\mathbf{Icg}u' \cdot v\,\mathbf{Icg}v' \cdot z\,\mathbf{Ie}z'\}.$$

Por lo tanto, **Ib** es una relación entre dos biontes completos x e y cuando existen u, v, z y u', v', z', tales que $\mathbf{unc}\,(u, v, z, x)$ y $\mathbf{unc}\,(u', v', z', y)$ y los correspondientes gametos están mutuamente en **Ig**, y los ambientes están mutuamente en **Ie**. Del hecho de que los correspondientes gametos están mutuamente en **Ig** se seguirá (por D.16) que sus citoplasmas están mutuamente en **Icg**.

En el caso de **Ibx**, la definición es más complicada por el hecho de que el

gameto masculino de un bionte completo estará en **Iag** con el gameto femenino del otro, y el gameto femenino de uno estará en **Iag** con el gameto masculino del otro. Como no hemos mencionado la relación **Ig** es necesario incluir, en la definición, el enunciado de que los citoplasmas de los gametos correspondientes están mutuamente en **Icg**. Como en el caso de **Ib** es necesario añadir que los ambientes están mutuamente en **Ie**.

No es difícil probar ahora los siguientes teoremas:

[T.33] $\mathbf{Ib} \in \text{sym} \cap \text{trans}.$

Ello requiere D.17, T.26, A.5 y A.10.

[T.34] $\mathbf{Ibx} \in \text{sym}$ (por D.18, T.24 y A.5).

[T.35] $\mathbf{Ibx} \mid \mathbf{Ibx} \subset \mathbf{Ib}.$

Así pues, **Ibx** no es transitiva, pero el producto relativo de esta relación consigo misma está incluido en la relación **Ib**. Esto sucede porque cuando pasamos de $x\,\mathbf{Ibx}\,y$ a $y\,\mathbf{Ibx}\,z$, el efecto de darse **Iag** entre gametos no-correspondientes en el primer paso, se invierte por la ocurrencia del mismo proceso en el segundo. Se puede probar este teorema por medio de D.18, A.10, T.24, T.25, D.16. A.5 y D.17.

Podemos ahora formular teoremas en los que se usan las relaciones **Ib** e **Ibx** en conexión con tétradas genéticas:

[T.36] $\text{A, B} \in \mathbf{gtet} \cdot \text{A}_1\,\mathbf{Ig}\,\text{B}_1 \cdot \text{A}_2\,\mathbf{Ig}\,\text{B}_2 \cdot \text{A}_3\,\mathbf{Ie}\,\text{B}_3 \cdot \supset \cdot \text{A}_4\,\mathbf{Ib}\,\text{B}_4.$

[T.37] $\text{A, B} \in \mathbf{gtet} \cdot \text{A}_1\,\mathbf{Iag}\,\text{B}_2 \cdot \text{A}_2\,\mathbf{Iag}\,\text{B}_1 \cdot \text{A}_1\,\mathbf{Icg}\,\text{B}_1 \cdot \text{A}_2\,\mathbf{Icg}\,\text{B}_2 \cdot \text{A}_3\,\mathbf{Ie}\,\text{B}_3 \cdot \supset \cdot \text{A}_4\,\mathbf{Ibx}\,\text{B}_4.$

[T.38] $\text{A, B, C} \in \mathbf{gtet} \cdot \text{A}_4\,\mathbf{Ibx}\,\text{B}_4 \cdot \text{B}_4\,\mathbf{Ibx}\,\text{C}_4 \cdot \supset \cdot \text{A}_4\,\mathbf{Ib}\,\text{C}_4.$

Dejando a los biontes, hemos de prestar alguna atención a los citoplasmas. Ocasionalmente se necesitarán las siguientes relaciones:

[D.19] $\mathbf{CI}_2 = \widehat{\text{A}}\,\widehat{\text{B}}\,\{\text{A, B} \in \mathbf{gtet} \cdot \text{A}_1\,\mathbf{Icg}\,\text{B}_1 \cdot \text{A}_2\,\mathbf{Icg}\,\text{B}_2\}.$

Así pues, $\mathbf{CI}_2$ es una relación que se da entre dos tétradas genéticas cuando cada gameto de una está en **Icg** con el gameto correspondiente de la otra. Con la ayuda de T.25 es fácil probar lo que sigue:

[T.39] $\mathbf{CI}_2 \in \text{sym} \cap \text{trans}.$

Podemos usar esta relación para definir una relación triádica que es el análogo para **Icg** de la relación derivada de **Ie** y dada en D.7.

[D.20] $\mathbf{CI}_3 = \widehat{\text{A}}\,\widehat{\text{B}}\,\widehat{\text{C}}\,\{\text{A}\,\mathbf{CI}_2\,\text{B} \cdot \text{B}\,\mathbf{CI}_2\,\text{C}\}.$

Correspondiendo a T.6 y T.7 tenemos lo siguiente:

[T.40] $\mathbf{CI}_3(\text{A, B, C}) \supset \text{A}\,\mathbf{CI}_2\,\text{C}.$

[T.41] $\mathbf{CI}_3(\text{A, B, C}) \cdot \mathbf{CI}_3(\text{C, D, E}) \cdot \supset \cdot \mathbf{CI}_3(\text{A, C, E}) \cdot \mathbf{CI}_3(\text{B, C, D}).$

Tenemos ahora todas las definiciones requeridas para pasar al problema de relaciones genéticamente especificadas entre tétradas genéticas. Hay un gran número de tales relaciones, pero aquí concentraremos nuestra atención en las que ocurren más comúnmente en cálculos genéticos.

Se llaman relaciones gaméticamente especificadas porque en sus definiciones sólo se mencionan relaciones entre gametos. La primera es denotada por '**(IIII)**' y se define como sigue:

[D.21] $\mathbf{(IIII)} = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\{A, B \in \mathbf{gtet} \cdot A_1\,\mathbf{Ig}\,B_1 \cdot A_2\,\mathbf{Ig}\,B_2 \cdot A_1\,\mathbf{Iag}\,A_2 \cdot B_1\,\mathbf{Iag}\,B_2\}.$

De esto y T.24 y T.25 podemos probar:

[T.42] $\mathbf{(IIII)} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}.$

Asimismo, de D.21 y D16 podemos ver que:

[T.43] $A\ \mathbf{(IIII)}\ B \cdot \supset \cdot A_1\,\mathbf{Icg}\,B_1 \cdot A_2\,\mathbf{Icg}\,B_2.$

Si añadimos a la información que nos proporciona D.21 el ulterior dato de que A_3 es genéticamente indistinguible de B_3, tenemos el siguiente e importante teorema:

[T.44] $A\ \mathbf{(IIII)}\ B \cdot A_3\,\mathbf{Ie}\,B_3 \cdot \supset \cdot A_4\,\mathbf{Ib}\,B_4.$

Esto significa que cuando las condiciones requeridas por (IIII) e **Ie** se cumplen para cualquier par de tétradas genéticas, tendremos que cada miembro de A es genéticamente indistinguible del miembro correspondiente de B. Podemos, por tanto, decir que son *duplicados* uno de otro, y podemos definir esta relación como sigue:

[D.22] $\mathbf{Dup_o} = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\{A\ \mathbf{(IIII)}\ B \cdot A_3\,\mathbf{Ie}\,B_3\}.$

Como se explicará más tarde, el subíndice 'o' en la definición anterior se refiere al hecho de que no hay diversidad entre los gametos. Que esta relación es simétrica y transitiva se sigue del hecho de que tanto **(IIII)** e **Ie** son ambas simétricas y transitivas. Las clases de equivalencia derivables de esto y las muchas otras relaciones de equivalencia-duplicación juegan una parte importante en el resultado.

[T.45] $\mathbf{Dup_o} \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}$ (por D.22, T.42 y A.5).

Adicionalmente podemos dar aquí otro teorema relativo a **(IIII)**.

[T.46] $\mathbf{(IIII)} \subset \mathbf{CI_2}$ (por D.21, D.16 y D.19).

Hay otra relación gaméticamente especificada entre tétradas genéticas que envuelve no diversidad gamética y es denotada por '**(IIII)x**'. La '**x**' en este símbolo, al igual que en '**Ibx**', pretende ser un índice rememorativo del hecho de que en esta relación, en vez de estar el gameto masculino de un término en **Ig** con el gameto masculino del segundo, está en **Iag** con el gameto femenino de dicho segundo término; y el gameto femenino del primer término está en **Iag** con

el gameto masculino del segundo. Esto quedará claro con la siguiente definición:

[D.23] $\mathbf{(IIII)}\,x = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\{A, B \in \mathbf{gtet} \cdot A_1\,\mathbf{Iag}\,B_2 \cdot A_2\,\mathbf{Iag}\,B_1 \cdot A_1\,\mathbf{Iag}\,A_2 \cdot B_1\,\mathbf{Iag}\,B_2\}$.

[T.47] $\mathbf{(IIII)} \subset \mathbf{(IIII)}\,x$ (por D.21, D.16 y D.23).

Combinando los teoremas 46 y 47 tenemos:

[T.48] $\mathbf{(IIII)} \subset \mathbf{(IIII)}\,x \cap \mathbf{CI}_2$.

El próximo teorema muestra que T.48 puede transponerse:

[T.49] $\mathbf{(IIII)}\,x \cap \mathbf{CI}_2 \subset \mathbf{(IIII)}$ (por D.23, D.19 y T.24).

Combinando estas dos inclusiones obtenemos identidad:

[T.50] $\mathbf{(IIII)} = \mathbf{(IIII)}\,x \cap \mathbf{CI}_2$.

A continuación vienen unos cuantos teoremas que tratan de estas relaciones.

[T.51] $\mathbf{(IIII)}\,x \cap \mathbf{CI}_2 \in \mathrm{sym} \cap \mathrm{trans}$ (por T.42 y T.50).

[T.52] $A\,\mathbf{(IIII)}\,x\,B \cdot A\,\mathbf{CI}_2\,B \cdot A_3\,\mathbf{Ie}\,B_3 \cdot \supset \cdot A_4\,\mathbf{Ib}\,B_4$ (por D.23, T.37 y D.19).

[T.53] $A\,\mathbf{(IIII)}\,x \cap \mathbf{CI}_2\,B \cdot A_3\,\mathbf{Ie}\,B_3 \cdot \supset \cdot A\,\mathbf{Dup}_0\,B$ (por T.44 y T.50).

El último teorema muestra que podemos tener $\mathbf{Dup}_0$ con $\mathbf{(IIII)}\,x$ al igual que con **(IIII)** con tal que tengamos también $\mathbf{CI}_2$. Estos teoremas subrayan el hecho de que si queremos hacer uso del pensamiento exacto no podemos omitir la mención de citoplasmas y ambientes.

Antes de volver al problema de la diversidad de gametos, será conveniente decir primero algo sobre lo que vamos a llamar las relaciones de segregación. Estas relaciones se refieren al transporte de información sobre los tipos de autosomas que presenta un bionte completo en su comienzo, y los tipos de autosomas que son producidos por el bionte. Entendemos por 'tipos de autosomas' las 'clases de equivalencia de la relación **Ia**'. La hipótesis más comúnmente ejemplificada supone que cuando tenemos **prd** (A, B, C) los autosomas que entran en C a partir de A son del mismo tipo que los que presenta A por medio de A_1 o A_2; y los que entran en C a partir de B son del mismo tipo que los que presenta B por medio de B_1 o B_2. Así como hay muchas relaciones de duplicación, dependiendo del grado de diversidad de los gametos dentro de las tétradas genéticas, así también hay, por la misma razón, muchas relaciones de segregación. Empezamos por lo tanto con los ejemplos más simples. La relación más simple se denotará por '**Sgr**' y, dado que es la suma de cuatro relaciones, nos ocuparemos en primer lugar de la última de ellas, lo cual nos permitirá definir **Sgr** como la suma de las mismas; estas cuatro serán denotadas por: '$\mathbf{sgr}_1$', '$\mathbf{sgr}_2$', '$\mathbf{sgr}_3$' y '$\mathbf{sgr}_4$'; sus definiciones son:

[D.24] $\mathbf{sgr}_1 = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\,\{\mathbf{prd}\,(A, B, C) \cdot A_1\,\mathbf{Iag}\,C_1 \cdot B_1\,\mathbf{Iag}\,C_2\}$.

[D.25] $\mathbf{sgr}_2 = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\,\{\mathbf{prd}\,(A, B, C) \cdot A_1\,\mathbf{Iag}\,C_1 \cdot B_2\,\mathbf{Iag}\,C_2\}$.

[D.26] $\mathbf{sgr}_3 = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\{\mathbf{prd}\,(A, B, C) \cdot A_2\,\mathbf{lag}C_1 \cdot B_1\,\mathbf{lag}C_2\}.$

[D.27] $\mathbf{sgr}_4 = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\{\mathbf{prd}\,(A, B, C) \cdot A_2\,\mathbf{lag}C_1 \cdot B_2\,\mathbf{lag}C_2\}.$

Así pues, tenemos un triplo de tétradas genéticas A, B, C, que están entre sí en $\mathbf{sgr}_1$ si, y sólo si, tenemos **prd** (A, B, C) y los autosomas de A_1 son genéticamente indistinguibles de los de C_1, y los autosomas de B_1 son genéticamente indistinguibles de los de C_2. Y así sucesivamente para las tres combinaciones restantes. La relación **Sgr** se define ahora como sigue:

[D.28] $\mathbf{Sgr} = \mathbf{sgr}_1 \cup \mathbf{sgr}_2 \cup \mathbf{sgr}_3 \cup \mathbf{sgr}_4.$

Volvemos ahora al problema de mostrar cómo las relaciones gaméticamente especificadas entre tétradas genéticas y la relación de segregación nos permiten inferir la relación entre A y C cuando tenemos **prd** (A, B, C). Necesitamos los siguientes teoremas:

[T.54] $\mathbf{sgr}_2\,(A, B, C) \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,B \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,C.$

La prueba es como sigue:

(i) $\mathbf{sgr}_2\,(A, B, C) \cdot \supset \cdot \mathbf{prd}\,(A, B, C) \cdot A_1\,\mathbf{lag}C_1 \cdot B_2\,\mathbf{lag}C_2$ (por D.25).

(ii) $A\,(\mathbf{IIII})\,B \cdot \supset \cdot A_1\,\mathbf{Ig}B_1 \cdot A_2\,\mathbf{Ig}B_2 \cdot A_1\,\mathbf{lag}A_2$ (por D.21).

(iii) $A_2\,\mathbf{Ig}B_2 \cdot B_2\,\mathbf{Ig}C_2 \cdot \supset \cdot A_2\,\mathbf{Ig}C_2$ (por T.26).

(iv) $A_1\,\mathbf{Ig}C_1 \cdot \supset \cdot C_1\,\mathbf{Ig}A_1$ (por T.26, $\mathrm{Ig} \in \mathrm{sym}$).

(v) $C_1\,\mathbf{Ig}A_1 \cdot A_1\,\mathbf{lag}A_2 \cdot A_2\,\mathbf{Ig}C_2 \cdot \supset \cdot C_1\,\mathbf{lag}C_2$ (por T.30).

(vi) $A_1\,\mathbf{Ig}C_1 \cdot A_2\,\mathbf{Ig}C_2 \cdot A_1\,\mathbf{lag}A_2 \cdot C_1\,\mathbf{lag}C_2 \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C$ (por D.21).

(vii) $A\,(\mathbf{IIII})\,B \cdot \supset \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,A$ (por T.42).

(viii) $B\,(\mathbf{IIII})\,A \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C \cdot \supset \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,C$ (por T.42).

(ix) $\mathbf{sgr}_2\,(A, B, C) \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,B \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,C$ (i), (vi), (viii).

[T.55] $\mathbf{sgr}_1\,(A, B, C) \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,B \cdot A_2\,\mathbf{Icg}C_2 \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,C.$

La prueba de este teorema sigue los mismos pasos que la de T.54 excepto que $A_2\,\mathbf{lag}B_2 \cdot B_2\,\mathbf{lag}C_2$ da lugar sólo a $A_2\,\mathbf{lag}C_2$. A esto debemos añadir $A_2\,\mathbf{Icg}C_2$ con vistas a obtener $A_2\,\mathbf{Ig}C_2$ (por D.16). Los dos próximos teoremas también requieren información sobre los citoplasmas.

[T.56] $\mathbf{sgr}_3\,(A, B, C) \cdot A\,(\mathbf{IIII}) \cdot B \cdot A\mathbf{CI}_2C \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,C.$

[T.57] $\mathbf{sgr}_4\,(A, B, C) \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,B \cdot A_1\,\mathbf{Icg}C_1 \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,C.$

Estos cuatro teoremas pueden ser resumidos en uno, usando **Sgr**:

[T.58] $\mathbf{Sgr}\,(A, B, C) \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,B \cdot A\mathbf{CI}_2C \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,C \cdot B\,(\mathbf{IIII})\,C.$

Los cinco próximos teoremas corresponden a los cinco últimos teoremas, pero con $(\mathbf{IIII})x$ y $\mathbf{CI}_3$ como antecedentes en vez de $(\mathbf{IIII})$ y $\mathbf{CI}_2$.

[T.59] $\mathbf{sgr}_2(A, B, C) \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ C \cdot B\ (\mathbf{IIII})\ C.$

La prueba es como sigue:

(i) $\mathbf{sgr}_2(A, B, C) \cdot \supset \cdot A_1\ \mathbf{Ig}\ C_1 \cdot B_2\ \mathbf{Ig}\ C_2$ (por D.25).

(ii) $A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot \supset \cdot A_1\ \mathbf{Iag}\ B_2 \cdot A_2\ \mathbf{Iag}\ B_1 \cdot A_1\ \mathbf{Iag}\ A_2 \cdot B_1\ \mathbf{Iag}\ B_2$ (por D.23).

(iii) $\mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\mathbf{CI}_2 C \cdot B\mathbf{CI}_2 C$ (por T.40 y D.20) $\cdot\ A\mathbf{CI}_2 B.$

(iv) $A\mathbf{CI}_2 C \cdot \supset \cdot A_2\ \mathbf{Icg}\ C_2$ (por D.19).

(v) $A_2\ \mathbf{Iag}\ B_1 \cdot B_1\ \mathbf{Iag}\ B_2 \cdot B_2\ \mathbf{Ig}\ C_2 \cdot \supset \cdot A_2\ \mathbf{Iag}\ C_2$ (por T.24 y T.29).

(vi) $A_2\ \mathbf{Iag}\ C_2 \cdot A_2\ \mathbf{Icg}\ C_2 \cdot \supset \cdot A_2\ \mathbf{Ig}\ C_2$ (por D.16).

(vii) $C_1\ \mathbf{Ig}\ A_1 \cdot A_1\ \mathbf{Iag}\ A_2 \cdot A_2\ \mathbf{Ig}\ C_2 \cdot \supset \cdot C_1\ \mathbf{Iag}\ C_2$ (por D.16, T.28 y T.29).

(viii) $A_1\ \mathbf{Ig}\ C_1 \cdot A_2\ \mathbf{Ig}\ C_2 \cdot A_1\ \mathbf{Iag}\ A_2 \cdot C_1\ \mathbf{Iag}\ C_2 \cdot \supset \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ C$ (por D.21).

(ix) $A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot A\mathbf{CI}_2 B \cdot \supset \cdot B\ (\mathbf{IIII})\ x \cap \mathbf{CI}_2 A$ (por T.51).

(x) $B\ (\mathbf{IIII})\ x\ \mathbf{CI}\ A \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ C \cdot \supset \cdot B\ (\mathbf{IIII})\ C$ (por T.50 y T.42).

[T.60] $\mathbf{sgr}_1(A, B, C) \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ C \cdot B\ (\mathbf{IIII})\ C.$

[T.61] $\mathbf{sgr}_3(A, B, C) \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ C \cdot B\ (\mathbf{IIII})\ C.$

[T.62] $\mathbf{sgr}_4(A, B, C) \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ C \cdot B\ (\mathbf{IIII})\ C.$

[T.63] $\mathbf{Sgr}\ (A, B, C) \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ C \cdot B\ (\mathbf{IIII})\ C.$

Estos teoremas nos dicen que cuando no hay diversidad autosómica o citoplasmática entre los gametos de los predecesores, y vale la hipótesis de segregación, entonces no hay tal diversidad entre los gametos de los predecesores y los de los sucesores.

Para obtener duplicación hemos de añadir el requisito expresado por '**EI** (A, B, C)' (ver D.7) a los antecedentes de T.57 y T.62.

[T.64] $\mathbf{Sgr}(A, B, C) \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ B \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \mathbf{EI}(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\mathbf{Dup}_0 B \cdot B\mathbf{Dup}_0 C.$

[T.65] $\mathbf{Sgr}(A, B, C) \cdot A\ (\mathbf{IIII})\ x\ B \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C) \cdot \mathbf{EI}(A, B, C) \cdot \supset \cdot A\mathbf{Dup}_0 C \cdot B\mathbf{Dup}_0 C.$

La prueba de estos teoremas precisa referencia a D.22.

Bastante se ha hablado ya de la indistinguibilidad genética entre gametos; debemos pasar ahora a considerar la diversidad genética entre gametos. No se trata aquí de relaciones simples, porque hay muchas formas en que los gametos pueden diferir. La ciencia natural es en buena medida una búsqueda de diversidad y ello puede hacerse de dos modos: bien retrocediendo en el tiempo hacia la diversidad entre sucesos precedentes; o bien profundizando en el espacio hacia la diversidad entre partes cada vez más pequeñas. Confinaremos aquí nuestra búsqueda a la diversidad entre autosomas. Primero construiremos algunas definiciones necesarias.

[D.29] $\mathbf{daut}(x, y) = \widehat{\alpha}\{(\exists u, v) \cdot \alpha = \langle u, v \rangle \cdot u\ \mathbf{caut}(x, y)\ v \cdot \sim(u\ \mathbf{Ia}\ v)\}.$

Así '**daut** (x, y)' ha de denotar el conjunto de todos los pares '$\{u, v\}$' de autosomas tales que u **caut** (x, y) v y u *no* es genéticamente indistinguible de v. Ahora podemos construir una definición para el signo que expresa el número cardinal de un tal conjunto de pares, para un par dado de gametos:

[D.30] $$\mathbf{D}_n = \widehat{x}\,\widehat{y}\{\mathrm{Nc}\,(\mathbf{daut}\,(x, y)) = n\}.$$

Así un gameto x está en $\mathbf{D}_n$ con un gameto y si, y sólo si, los pares de autosomas correspondientes que los distinguen son n en número. Por ejemplo, si A y B son tétradas genéticas, entonces '$A_1\mathbf{D}_2B_1$' significará que hay exactamente *dos* pares de autosomas correspondientes, que tienen el primer miembro en A_1 y el segundo en B_1 y siendo cada par un par de diversidad como se requiere por D.29. Es fácil ver que lo que sigue son teoremas.

[T.66] $$x\,\mathbf{lag}\,y \cdot \supset \cdot \mathbf{daut}\,(x, y) = \Lambda.$$

[T.67] $$x\,\mathbf{lag}\,y \cdot \supset \cdot x\,\mathbf{Do}\,y.$$

[T.68] $$\mathrm{A}\,(\mathbf{IIII})\,\mathrm{B} \cdot \supset \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_0\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{A}_2\mathbf{D}_0\mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_0\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{B}_1\mathbf{D}_0\mathrm{B}_2.$$

[T.69] $$x\,\mathbf{D}_m y \cdot x\,\mathbf{D}_n y \cdot \supset \cdot m = n.$$

La definición siguiente es una aplicación de la anterior idea, no directamente a gametos, sino a tétradas genéticas a las que pertenecen los gametos:

[D.31] $$\mathbf{D}_g\,(\mathrm{A}) = (\imath n)\,(\mathrm{A} \in \mathbf{gtet} \cdot \mathrm{Nc}\,(\mathbf{daut}\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)) = n).$$

Llamamos a este número $\mathbf{D}_g\,(\mathrm{A})$ el grado de diversidad interna de los gametos de la tétrada genética A.

Ahora estamos en situación de definir algunas relaciones gaméticamente especificadas entre tétradas genéticas que envuelven diversidad gamética. Hasta ahora solamente hemos definido las dos sin diversidad: **(IIII)**, **(IIII)** x.

[D.32] $$(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II}) = \widehat{\mathrm{A}}\,\widehat{\mathrm{B}}\{\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{gtet} \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_n\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{A}_2\mathbf{D}_n\mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_0\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{B}_1\mathbf{D}_0\mathrm{B}_2\}.$$

[D.33] $$(\mathbf{ID}_n\mathbf{ID}_n) = \widehat{\mathrm{A}}\,\widehat{\mathrm{B}}\{\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{gtet} \cdot \mathrm{A}_1\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{A}_2\mathbf{D}_n\mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_0\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{B}_1\mathbf{D}_0\mathrm{B}_2\}.$$

[D.34] $$(\mathbf{D}_n\mathbf{IID}_n) = \widehat{\mathrm{A}}\,\widehat{\mathrm{B}}\{\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{gtet} \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_n\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{A}_2\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_0\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{B}_1\mathbf{D}_n\mathrm{B}_2\}.$$

[D.35] $$(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_n) = \widehat{\mathrm{A}}\,\widehat{\mathrm{B}}\{\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{gtet} \cdot \mathrm{A}_1\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{A}_2\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathbf{D}_n\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{B}_1\mathbf{D}_n\mathrm{B}_2\}.$$

Estas cuatro relaciones son las que se dan más frecuentemente en los sistemas de reproducción mendelianos; pero hay muchas más relaciones posibles definidas de una forma similar. Aunque algunas relaciones así definidas no tienen miembros. Por ejemplo, puede ser probado que $(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_m) = \Lambda$ a no ser que $n = m$. Para poder probar esto necesitamos definir '**Da**' (la relación de diversidad entre autosomas), y ello lo hacemos del siguiente modo:

[D.36] $$\mathbf{Da} = \widehat{u}\,\widehat{v}\{\sim(u\,\mathbf{Ia}\,v) \cdot (\exists x, y) \cdot u\,\mathbf{caut}\,(x, y)\,v\}.$$

Esto es tanto como decir que tenemos $u\,\mathbf{Da}\,v$ cuando u y v son autosomas

correspondientes de gametos x e y, y u y v no son genéticamente indistinguibles. Los productos relativos de estas relaciones entre autosomas siguen la regla usual como se expresa en el siguiente teorema:

[T.70] $$\mathbf{Ia} \mid \mathbf{Da} \subset \mathbf{Da} \cdot \mathbf{Da} \mid \mathbf{Ia} \subset \mathbf{Da}.$$

También necesitamos el siguiente teorema:

[T.71] $$\mathrm{Nc}(\mathbf{daut}(x, y)) = n \cdot \mathrm{Nc}(\mathbf{daut}(y, z)) = 0 \cdot \supset \cdot \mathrm{Nc}(\mathbf{daut}(x, z)) = n.$$

Pues si tenemos $u\,\mathbf{caut}\,(x, y)\,v$, entonces o $u\,\mathbf{Da}v$ o $u\,\mathbf{Ia}v$, pero si tenemos $v\,\mathbf{caut}\,(y, z)\,w$ sólo podemos tener $v\,\mathbf{Ia}w$. Y si tenemos $u\,\mathbf{Da}v$ y $v\,\mathbf{Ia}w$ entonces (por T.70) $u\,\mathbf{Da}w$. Si, no obstante, tenemos $u\,\mathbf{Ia}v$ y $v\,\mathbf{Ia}w$, entonces, $u\,\mathbf{Ia}w$ (por A.18). Ahora $\mathbf{caut}\,(x, y)$ y $\mathbf{caut}\,(y, z)$ son de uno-a-uno y así $\mathbf{caut}\,(x, z)$ es de uno-a-uno (por *Principia Mathematica* *71.252). Consecuentemente si hay n pares **Da** entre los autosomas de x e y habrá n de tales pares entre los autosomas de x y z, sin que los de y y z tengan efecto sobre la diversidad.

[T.72] $$(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_m) \neq \Lambda \supset n = m.$$

Esto puede probarse como sigue: si $(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_m)$ no es nulo deben existir tétradas genéticas A y B tales que $\mathrm{A}\,(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_m)\,\mathrm{B}$ y si, como suponemos, esta relación ha sido definida siguiendo los mismos pasos que D.35, excepto que tiene '$\mathbf{D}_m$' en el lugar de la segunda '$\mathbf{D}_n$', tendríamos: $\mathrm{A}_1\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_1$ y $\mathrm{A}_2\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_2$ y $\mathrm{A}_1\,\mathbf{D}_n\,\mathrm{A}_2$ y $\mathrm{B}_1\,\mathbf{D}_m\,\mathrm{B}_2$ (por D.35, pero con '$\mathbf{D}_m$' en vez de '$\mathbf{D}_n$'), y de $\mathrm{A}_1\,\mathbf{D}_n\,\mathrm{A}_2$ y $\mathrm{A}_2\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_2$ tenemos $\mathrm{A}_1\,\mathbf{D}_n\,\mathrm{B}_2$, por D.29, T.66 y T.67. A partir de $\mathrm{A}_1\,\mathbf{D}_n\,\mathbf{B}_2$ y T.71, tenemos $\mathrm{Nc}\,(\mathbf{daut}\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2)) = n$.

Por un procedimiento similar, a partir de $\mathrm{A}_1\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_1$ y $\mathrm{B}_1\,\mathbf{D}_m\,\mathrm{B}_2$ obtenemos $\mathrm{A}_1\,\mathbf{D}_m\,\mathrm{B}_2$; a partir del último obtenemos $\mathrm{Nc}\,(\mathbf{daut}\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2)) = m$. Finalmente, a partir de $\mathrm{Nc}\,(\mathbf{daut}\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2)) = n \cdot \mathrm{Nc}\,(\mathbf{daut}\,(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{B}_2)) = m$, tenemos:

$$n = m.$$

Por un procedimiento similar, podemos probar un teorema correspondiente para cualquier relación gaméticamente especificada entre tétradas genéticas en cuya designación se dan dos '**I**' así como dos '**D**' con diferentes subíndices numéricos. También puede demostrarse que si tenemos tres '**I**' en la designación de tal relación, debemos tener también una cuarta. Por ejemplo, supongamos que tenemos $\mathrm{A}\,(\mathbf{IIII}\text{-})\,\mathrm{B}$, entonces tendremos: $\mathrm{A}_1\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_1$ y $\mathrm{A}_2\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_2$ y $\mathrm{A}_3\,\mathbf{Iag}\,\mathrm{A}_2$.

A partir de este $\mathrm{A}_1\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_1$ y $\mathrm{A}_1\,\mathbf{Iag}\,\mathrm{A}_2$ se produce $\mathrm{B}_1\,\mathbf{Iag}\,\mathrm{A}_2$ (por T.30) y a partir de $\mathrm{B}_1\,\mathbf{Iag}\,\mathrm{A}_2$ y $\mathrm{A}_2\,\mathbf{Ig}\,\mathrm{B}_2$ se produce $\mathrm{B}_1\,\mathbf{Iag}\,\mathrm{B}_2$ (por T.29), y así tenemos $\mathrm{A}\,(\mathbf{IIII})\,\mathrm{B}$ (por D.21).

Antes de dejar el tema de las relaciones entre gametos hay que añadir un teorema más:

[T.73] $$\mathbf{Iag} \mid \mathbf{D}_n \mid \mathbf{Iag} \subset \mathbf{D}_n \qquad \text{(por T.67 y T.69).}$$

Supongamos que $\emptyset$ es una clase de equivalencia de la relación $\mathbf{Dup}_0$, entonces si A y B son dos miembros cualesquiera de $\emptyset$ tendremos $\mathrm{A}\,(\mathbf{IIII})\,\mathrm{B}$ y $\mathrm{A}_3\,\mathbf{Ie}\,\mathrm{B}_3$,

por D.22. Si existe una tétrada genética C tal que **Sgr** (A, B, C) y **EI** (A, B, C) y $A\mathbf{CI}_2C$, entonces tendremos $A\mathbf{Dup}_0C$, por T.64. Consideremos ahora otra clase de equivalencia Ψ tal que $\emptyset \neq \Psi$, y supongamos que D es un miembro de Ψ; ¿qué podemos inferir considerando la relación gaméticamente especificada entre C y D? Claramente tenemos $C_1\,\mathbf{lag}\,C_2$ y $D_1\,\mathbf{lag}\,D_2$, pero no podemos tener C (**IIII**) D porque entonces C y D serían duplicados y esto sería contrario a nuestra hipótesis de que $\emptyset \neq \Psi$. Debemos por tanto tener un número natural n mayor que 0, tal que $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D$. Podemos ahora probar los siguientes teoremas.

[T.74] $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D \cdot \mathbf{sgr}_1(C,D,E) \cdot \mathbf{CI}_3(C, D, E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{ID}_n\mathbf{ID}_n)E \cdot D(\mathbf{D}_n\mathbf{IID}_n)E.$

Esto se prueba con la ayuda de D.24, D.32 y T.73. Los tres siguientes teoremas se prueban de forma similar.

[T.75] $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D \cdot \mathbf{sgr}_2(C,D,E) \cdot \mathbf{CI}_3(C,D,E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{ID}_n\mathbf{ID}_n)E \cdot D(\mathbf{D}_n\mathbf{IID}_n)E.$

[T.76] $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D \cdot \mathbf{sgr}_3(C,D,E) \cdot \mathbf{CI}_3(C,D,E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{ID}_n\mathbf{ID}_n)E \cdot D(\mathbf{D}_n\mathbf{IID}_n)E.$

[T.77] $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D \cdot \mathbf{sgr}_4(C,D,E) \cdot \mathbf{CI}_3(C,D,E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{ID}_n\mathbf{ID}_n)E \cdot D(\mathbf{D}_n\mathbf{IID}_n)E.$

Se puede ver que, en cada uno de los últimos cuatro teoremas, cada una de las cuatro sub-relaciones de **Sgr** (véase D.28) producen el mismo resultado. Esto es porque con $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D$ ambas tétradas genéticas tienen el mismo grado de diversidad gamética interna (véase D.31) y ésta es cero o $\mathbf{Dg}(C) = \mathbf{Dg}(D) = 0$. A causa de esto los cuatro teoremas pueden resumirse en uno:

[T.78] $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D \cdot \mathbf{Sgr}(C,D,E) \cdot \mathbf{CI}_3(C,D,E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{ID}_n\mathbf{ID}_n)E \cdot D(\mathbf{D}_n\mathbf{IID}_n)E.$

A partir del consecuente de este teorema es fácil probar que $E(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_n)E$. Porque, por D.33, a partir de $C(\mathbf{ID}_n\mathbf{ID}_n)E$ obtenemos $C_1\,\mathbf{Ig}\,E_1$, y a partir de éste tenemos $E_1\,\mathbf{Ig}\,C_1$; a partir de éstos formamos: $E_1\,\mathbf{Ig}\,C_1$ y $C_1\,\mathbf{Ig}\,E_1$, que produce: $E_1\,\mathbf{Ig}\,E_1$ (T.26). Por el mismo procedimiento, a partir de $D(\mathbf{D}_n\mathbf{IID}_n)E$ derivamos $E_2\,\mathbf{Ig}\,E_2$. A partir de D.33 o D.34 también tenemos $E_1\,\mathbf{D}_n\,E_2$. Conjuntando estos resultados tenemos: $E(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_n)E$. Así obtenemos:

[T.79] $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D \cdot \mathbf{Sgr}(C,D,E) \cdot \mathbf{CI}_3(C,D,E) \cdot \mathbf{EI}(C,D,E) \cdot \supset \cdot E(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_n)E.$

En el antecedente de este teorema hemos incluido el requisito de que los ambientes que pertenezcan a las tétradas genéticas deberían ser todos genéticamente indistinguibles, anticipándonos al próximo teorema, antes de lo cual debemos también proporcionar una definición de un conjunto completo de relaciones de duplicación, de acuerdo con el valor asignado a la variable n.

[D.37] $\mathbf{Dup}_n = \widehat{C}\,\widehat{D}\,\{C, D \in \mathbf{gtet} \cdot C(\mathbf{IID}_n\mathbf{D}_n)D \cdot C_3\,\mathbf{Ie}\,D_3\}.$

Podemos ahora afirmar el siguiente teorema sobre las bases de T.79 y D.37:

[T.80] $C(\mathbf{D}_n\mathbf{D}_n\mathbf{II})D \cdot \mathbf{Sgr}(C, D, E) \cdot \mathbf{CI}_3(C, D, E) \cdot \mathbf{EI}(C, D, E) \cdot \supset \cdot E\mathbf{Dup}_nE.$

Hemos tratado hasta ahora de tétradas genéticas, de relaciones gaméticamente

especificadas entre tales tétradas, y hemos dicho algo sobre relaciones de duplicación entre esas tétradas. Pero hemos dicho muy poco sobre las clases de equivalencia de dichas relaciones de duplicación. Pasamos ahora a ciertos tipos de tales clases de equivalencia que constituyen lo que aquí llamaremos *sistemas de reproducción*. Todo sistema de reproducción contiene un sub-conjunto compuesto por todos los miembros del sistema que son clases de equivalencia de la relación $\mathbf{Dup}_0$. Este sub-conjunto se llama *conjunto inicial* del sistema, porque todos los conjuntos restantes del sistema se derivan, como conjuntos de sucesores, a partir de los miembros del conjunto inicial. Todo esto quedará más claro si pasamos a considerar ejemplos de los sistemas de reproducción más sencillos.

El sistema de reproducción más sencillo es aquel que tiene uno, y sólo un miembro; y el conjunto inicial y el sistema mismo serán uno y el mismo conjunto. Así, si $\emptyset$ es una clase de equivalencia de la relación $\mathbf{Dup}_0$, entonces, $\{0\}$ será un sistema de reproducción y $\{0\}$ será su conjunto inicial. Esto es porque los sucesores de los miembros de una clase de equivalencia $\mathbf{Dup}_0$ también pertenecen a esta clase (véase T.64). Al conjunto de todos los sistemas de reproducción así de sencillos los designaremos por '$\mathbf{BS}_0$'. La significación del subíndice quedará explicada más adelante. Podemos por lo tanto escribir: $\{\emptyset\} \in \mathbf{BS}_0$ si $\emptyset$ satisface las condiciones mencionadas anteriormente.

Antes de que podamos describir los sistemas de reproducción del próximo grado de complejidad, llamado el conjunto $\mathbf{BS}_1$, necesitamos algunas definiciones y explicaciones preliminares. En primer lugar está la relación triádica de *representación* que se mantiene entre una clase de equivalencia α de la relación **Ia**, un autosoma u, que es un miembro de α, y un gameto x del cual u es un autosoma. De acuerdo con esto, la definición es como sigue:

[D.38] $$\mathbf{rep} = \widehat{\alpha}\,\widehat{u}\,\widehat{x}\{\alpha \in \mathrm{Equ}\,(\mathbf{Ia}) \cdot u \in \alpha \cdot u\,\mathbf{aut}\,x\}.$$

Los siguientes teoremas relativos a esta relación son útiles y se prueban fácilmente.

[T.81] $$\mathbf{rep}\,(\alpha, u, x) \cdot \mathbf{rep}\,(\beta, u, x) \cdot \supset \cdot \alpha = \beta.$$

(α y β tienen un miembro u en común y siendo clases de equivalencia de **Ia** deben, por lo tanto, ser idénticos).

[T.82] $\mathbf{rep}\,(\alpha, u, x) \cdot \mathbf{rep}\,(\alpha, v, x) \cdot \supset \cdot u = v$ (por A.17 y D.38).

[T.83] $\mathbf{rep}\,(\alpha, u, x) \cdot \mathbf{rep}\,(\alpha, u, y) \cdot \supset \cdot x = y$ (por A.15 y D.38).

La próxima definición lo es de una relación de correspondencia, no entre autosomas, sino entre conjuntos de autosomas, a saber, clases de equivalencia de la relación **Ia**.

[D.39] $$\mathbf{Cor}\,(x, y) = \widehat{\alpha}\,\widehat{\beta}\{(\exists u, v) \cdot u\,\mathbf{caut}\,(x, y)\,v \cdot \mathbf{rep}\,(\alpha, u, x) \cdot \mathbf{rep}\,(\beta, v, y)\}.$$

Se afirma que una clase de equivalencia α de **Ia** se corresponde (referente a los gametos x e y) con otra tal clase β si, y sólo si, existen autosomas u y v tales que $u\,\mathbf{aut}\,x$ y $u\,\mathbf{cor}\,v$ y $v\,\mathbf{aut}\,y$, y α está representada en x por u, y β está representada

en y por v. Se puede probar que esta relación es una relación de uno-a-uno, como se afirma en el siguiente teorema:

[T.84] $\quad \mathbf{Cor}\,(x, y) \in 1 \to 1 \qquad$ (por D.39 y T.16).

Es también conveniente tener definidas relaciones de representación para varios números de clases de equivalencia de **Ia** sin mencionar el miembro de la clase de equivalencia, así:

[D.40] $\quad \mathbf{rep}_1 = \widehat{\alpha}\widehat{x}\,\{(\exists u) \cdot \mathbf{rep}\,(\alpha, u, x)\}.$

[D.41] $\quad \mathbf{rep}_2 = \widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{x}\,\{(\exists u, v) \cdot \mathbf{rep}\,(\alpha, u, x) \cdot \mathbf{rep}\,(\beta, v, x) \cdot \alpha \neq \beta\}.$

Esto puede fácilmente ampliarse a un mayor número de conjuntos, cuando se requiera. Estas definiciones se refieren a representaciones en gametos. Podemos también tener definiciones para representaciones en tétradas genéticas.

[D.42] $\quad \mathbf{Rep}_1 = \widehat{\alpha}\widehat{\gamma}\widehat{A}\,\{A \in \mathbf{gtet} \cdot \alpha\mathbf{Cor}\,(A_1, A_2)\,\gamma\}.$

Se trata de una relación triádica que se mantiene entre dos clases de equivalencia de **Ia** y una tétrada genética A, cuando se da entre ellas la relación **Cor** referente a A_1 y A_2. Probamos el siguiente teorema con la ayuda de las Definiciones 42, 39 y 40:

[T.85] $\quad \mathbf{Rep}_1\,(\alpha, \gamma, A) \cdot \supset \cdot \mathbf{rep}_1\,(\alpha, A_1) \cdot \mathbf{rep}_1\,(\gamma, A_2).$

Para dos pares **Cor** necesitamos una relación quintiádica como la siguiente:

[D.43] $\quad \mathbf{Rep}_2 = \widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\widehat{\delta}\widehat{A}\,\{A \in \mathbf{gtet} \cdot \alpha\mathbf{Cor}\,(A_1, A_2)\,\gamma \cdot \beta\mathbf{Cor}\,(A_1, A_2)\,\delta\}.$

A partir de las Definiciones 43, 39 y 41 podemos derivar el siguiente teorema:

[T.86] $\quad \mathbf{Rep}_2\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, A) \cdot \supset \cdot \mathbf{rep}_2\,(\alpha, \beta, A_1) \cdot \mathbf{rep}_2\,(\gamma, \delta, A_2).$

Pueden fácilmente construirse definiciones correspondientes a mayor número de pares **Cor**.

Podemos ahora volver a la consideración de sistemas de reproducción pertenecientes al conjunto $\mathbf{BS}_1$. Un par $\{\emptyset, \Psi\}$ constituirá el conjunto inicial de un sistema de reproducción de esta clase si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\emptyset$ y Ψ son ambas clases de equivalencia de la relación $\mathbf{Dup}_0$;
(ii) esto significa que no existe más que un par **Cor** que las distingue;
(iii) este será el caso si existe un par $\{\alpha, \gamma\}$ tal que para cualquier $A \in \emptyset$ tenemos $\mathbf{Rep}_1\,(\alpha, \alpha, A)$ y para cualquier $B \in \Psi$ tenemos $\mathbf{Rep}_1\,(\gamma, \gamma, B)$ y $\alpha \neq \gamma$;
(iv) cada uno de los otros correspondientes pares de autosomas pertenecientes a gametos de A y gametos de B serán pares **Ia**.

Un resultado que se sigue si se satisfacen las anteriores condiciones queda expresado en el próximo teorema.

[T.87] $A \in \phi \cdot B \in \psi \cdot \phi, \psi \in \text{Equ}\,(\mathbf{Dup}_0) \cdot (\exists \alpha, \lambda) \cdot \mathbf{Rep}_1\,(\alpha, \alpha, A) \cdot$
$\cdot\, \mathbf{Rep}_1\,(\lambda, \lambda, B) \cdot \supset \cdot A\,(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{II})\,B.$

Esto quiere decir que miembros de ϕ estarán en $(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{II})$ con miembros de ψ.

Podemos ahora volver a la tarea de desarrollar los conjuntos de sucesores de los miembros del conjunto inicial $\{\phi, \psi\}$. Ello requiere nuevas definiciones que nos permitan usar los teoremas que pueden ser probados para tétradas genéticas con el propósito de aplicarlos a conjuntos de tétradas, de hecho a conjuntos que son clases de equivalencia de $\mathbf{Dup}_0$ para algunos valores de n. Este proceso se facilita por el hecho de que, con ligeras modificaciones, la notación que ha sido usada para relaciones gaméticamente especificadas entre tétradas genéticas puede también usarse para las correspondientes relaciones entre miembros de las clases de equivalencia de $\mathbf{Dup}_n$.

Por ejemplo, usando corchetes en vez de paréntesis, podemos construir la siguiente definición:

[D.44] $[\mathbf{IIII}] = \widehat{\phi}\,\widehat{\psi}\,\{\phi\,\psi \in \text{Equ}\,(\mathbf{Dup}_0) \cdot (\exists A, B) \cdot A \in \phi, B \in \psi \cdot A\,(\mathbf{IIII})\,B\}.$

Con esta definición se puede probar fácilmente el siguiente teorema; pero primero necesitamos una definición de las clases de equivalencia de la relación **Ie** entre ambientes. Como no se había necesitado hasta ahora no había sido introducida anteriormente en el sistema.

[D.45] $\phi_3 = \hat{x}\,\{(\exists n, A)\,\phi \in \text{Equ}\,(\mathbf{Dup}_n) \cdot A \in \phi \cdot x\,\mathbf{Ie}\,A_3\}.$

Por lo tanto ϕ_3 es un conjunto de ambientes, cada uno de los cuales es genéticamente indistinguible del miembro ambiental de una tétrada genética que es un miembro de una clase de equivalencia ϕ de $\mathbf{Dup}_n$, para algunos valores de n. Por referencia a A.5 y la definición de ϕ_3 es fácil demostrar que la última es una clase de equivalencia de **Ie**. Ahora podemos formular el teorema pospuesto:

[T.88] $\phi\,[\mathbf{IIII}]\,\psi \cdot \phi_3 = \psi_3 \cdot \supset \cdot \phi = \psi.$

Si existe un A tal que $A \in \phi$ y un B tal que $B \in \psi$ y $A\,(\mathbf{IIII})\,B$, de acuerdo con D.44, entonces debemos tener $A \in \psi$ dado que $B \in \psi$. También si $\phi_3 = \psi_3$, entonces $A_3\,\mathbf{Ie}\,B_3$; y si $A\,(\mathbf{IIII})\,B$ y $A_3\,\mathbf{Ie}\,B_3$ tenemos $A\,\mathbf{Dup}_0\,B$ por D.22. Por lo tanto, tenemos (por D.44) dos clases de equivalencia de $\mathbf{Dup}_0$ con un miembro común A y, consecuentemente, $\phi = \psi$.

Pero supongamos $\phi \neq \psi$ y el grado de diversidad gamética uno, entonces estarán mutuamente en la relación definida como sigue:

[D.46] $[\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{II}] = \widehat{\phi}\,\widehat{\psi}\,\{\phi, \psi \in \text{Equ}\,(\mathbf{Dup}_0) \cdot (\exists A, B) \cdot A \in \phi \cdot B \in \psi \cdot A\,(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{II})\,B\}.$

Aunque la definición requiere únicamente que un solo par de miembros, uno de ϕ y el otro de ψ, estén en $(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{II})$ mutuamente, se puede probar fácilmente que cualquier miembro de ϕ estará en esta relación con cualquier miembro de ψ. Se afirma esto en el siguiente teorema:

[T.89] $\phi\,[\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{II}]\,\psi \cdot A' \in \phi \cdot B' \in \psi \cdot \supset \cdot A'\,(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{II})\,B'.$

En términos generales la demostración es como sigue: como, por la definición, existe un miembro A de ϕ y un miembro B de ψ tal que $A\,(\mathbf{D_1 D_1 II})\,B$, de forma que $A_1\,\mathbf{D_1}\,B_1$, $A_2\,\mathbf{D_1}\,B_2$; y si $A' \in \phi$ y $\phi \in \text{Equ}\,(\mathbf{Dup_0})$ debemos tener $A'\,(\mathbf{IIII})\,A$ y consecuentemente $A'_1\,\mathbf{Ig}\,A_1$; también si $A'_1\,\mathbf{Ig}\,A_1$ y $A_1\,\mathbf{D_1}\,B_1$, entonces $A'_1\,\mathbf{D_1}\,B_1$ (por T.73 sustituyendo '*n*' por '1', y usando D.16). De nuevo, si $B \in \psi$ y $\psi \in \text{Equ}\,(\mathbf{Dup_0})$, entonces tenemos $B_1\,\mathbf{Ig}\,B'_1$; y así a partir de $A'_1\,\mathbf{D_1}\,B_1$ y $B_1\,\mathbf{Ig}\,B'_1$ (siendo **Ig** simétrica) obtenemos $A'_1\,\mathbf{D_1}\,B_1$. A partir de $A'\,(\mathbf{IIII})\,A$ tenemos $A'_1\,\mathbf{Iag}\,A'_2$, y a partir de $B \in \psi$, $B' \in \psi$ y $\psi \in \text{Equ}\,(\mathbf{Dup_0})$, tenemos $B'\,(\mathbf{IIII})\,B$ y por lo tanto $B'_1\,\mathbf{Iag}\,B_2$. Conjuntando todos estos resultados vemos que producen: $A'\,(\mathbf{D_1 D_1 II})\,B'$.

Se trata de la relación en que los predecesores están mutuamente en un sistema mendeliano simple; uno, llamado A, es un miembro de una clase de equivalencia ϕ de $\mathbf{Dup_0}$ y el segundo, B, es un miembro de otra clase ψ. Usando T.78 y T.79 podemos derivar las relaciones en que están A y B con el sucesor C y la relación en que están los sucesores entre ellos. Para llevarlo a cabo necesitamos sustituir las variables en estos teoremas a fin de que se ajusten al contexto presente. Por lo tanto, ponemos '1' por '*n*', 'A' por 'C', 'B' por 'D', y 'C' por 'E'. También debemos hacer adiciones a los antecedentes de estos teoremas si deben producir el máximo resultado. Es decir, debemos añadir '$\mathbf{EI}\,(A, B, C)$' y $\mathbf{CI_3}\,(A, B, C)$. Para evitar largas repeticiones sería deseable usar una relación sencilla que combinara las anteriores con $\mathbf{Sgr}\,(A, B, C)$. Lo cual puede hacerse usando la siguiente:

[D.47] $\quad \mathbf{SEC} = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\,\{\mathbf{Sgr}\,(A, B, C) \cdot \mathbf{EI}\,(A, B, C) \cdot \mathbf{CI_3}\,(A, B, C)\}.$

Podemos ahora expresar los teoremas requeridos como sigue:

[T.90] $\quad A(\mathbf{D_1 D_1 II})B \cdot \mathbf{SEC}(A,B,C) \cdot \supset \cdot A(\mathbf{ID_1 ID_1})C \cdot B(\mathbf{D_1 IID_1})C \cdot C(\mathbf{IID_1 D_1})C.$

[T.91] $\quad A(\mathbf{D_1 D_1 II})B \cdot \mathbf{SEC}\,(A,B,C) \cdot \supset \cdot C\,\mathbf{Dup_1}\,C$ (véase D.37).

Cuando no tenemos diversidad interna de gametos en los predecesores (evidenciada por (--**II**) en el símbolo para la relación entre ellos) la relación de segregación no produce diversidad entre sus sucesores; porque, como evidencia T.91, todos pertenecen a una clase de equivalencia de $\mathbf{Dup_1}$. También vemos a partir de aquí que tenemos una adición a los miembros de nuestro $\mathbf{BS_1}$. Además de los dos miembros del conjunto inicial tenemos un tercer miembro, no del conjunto inicial sino del sistema total, que podemos llamar θ, y que difiere tanto de ϕ como de ψ porque es una clase de equivalencia de $\mathbf{Dup_1}$, y no de $\mathbf{Dup_0}$.

La pregunta que nos queda es: ¿contiene el sistema de reproducción sólo los tres conjuntos ϕ, ψ y θ? Una respuesta obvia, de signo negativo, sería decir que, siempre que **SEC** opere, no puede haber desviación a partir de los autosomas de las clases que entran por medio de A y B cuando $A\,(\mathbf{D_1 D_1 II})\,B$. Pero no nos contentaremos con esta afirmación, sino que mostraremos cómo puede probarse en detalle. Debemos desarrollar las consecuencias de tres afirmaciones:

(i) $A\,(\mathbf{ID_1 ID_1})\,C \cdot \mathbf{SEC}\,(A, C, E)$,

(ii) $B\,(\mathbf{D_1 IID_1})\,C \cdot \mathbf{SEC}\,(A, C, E)$,

(iii) dada una tétrada genética D tal que $C(\mathbf{IID_1D_1})D$, desarrollar $C(\mathbf{IID_1D_1})D \cdot \mathbf{SEC}(C, D, E)$.

Las dos primeras corresponden a lo que sucede en un cruzamiento regresivo mendeliano; y la tercera dará el resultado observado en la segunda generación de reproducción mendeliana, en un sistema mendeliano simple.

Los siguientes teoremas, que pueden probarse a partir de las concernientes definiciones y Teoremas 24 a 27, nos ayudarán a encontrar las consecuencias de la primera de las afirmaciones antes citadas:

[T.92] $A(\mathbf{ID_1ID_1})C \cdot \mathbf{sgr_1}(A, C, E) \cdot \mathbf{CI_3}(A, C, E) \cdot \supset \cdot A(\mathbf{IIII})E.$

[T.93] $A(\mathbf{ID_1ID_1})C \cdot \mathbf{sgr_3}(A, C, E) \cdot \mathbf{CI_3}(A, C, E) \cdot \supset \cdot A(\mathbf{IIII})E.$

[T.94] $A(\mathbf{ID_1ID_1})C \cdot \mathbf{sgr_2}(A, C, E) \cdot \mathbf{CI_3}(A, C, E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{IID_1D_1})E.$

[T.95] $A(\mathbf{ID_1ID_1})C \cdot \mathbf{sgr_4}(A, C, E) \cdot \mathbf{CI_3}(A, C, E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{IID_1D_1})E.$

Sin olvidar que **Sgr** es la suma de las cuatro relaciones de segregación usadas en los últimos cuatro teoremas y añadiendo $\mathbf{EI}(A, C, E)$, usando D.47, podemos condensar estos cuatro teoremas en uno, así:

[T.96] $A(\mathbf{ID_1ID_1})C \cdot \mathbf{SEC}(A, C, E) \cdot \supset \cdot A\mathbf{Dup_0}E \vee C\mathbf{Dup_1}E$ (ver D.22 y D.37)

Esto significa que E es un miembro o bien de $\emptyset$ o bien de θ, de las antes mencionadas clases de equivalencia de $\mathbf{Dup_0}$ y $\mathbf{Dup_1}$.

El teorema correspondiente para '$B(\mathbf{D_1IID_1})C$' será como sigue (omitiendo los teoremas separados '**seg**' que siguen pasos similares a aquellos para '$A(\mathbf{ID_1ID_1})C$'):

[T.97] $B(\mathbf{D_1IID_1})C \cdot \mathbf{SEC}(B, C, E) \cdot \supset \cdot B\mathbf{Dup_0}E \vee C\mathbf{Dup_1}E.$

En este caso E pertenece a $\not\emptyset$ o a θ.

Nuestro tercer problema era: dada una tétrada genética D tal que $C(\mathbf{IID_1D_1})D$, hallar las consecuencias de $C(\mathbf{IID_1D_1}) \cdot \mathbf{SEC}(C, D, E)$. Procedemos como anteriormente hallando los resultados para cada una de las subrelaciones de $\mathbf{Sgr}(C, D, E)$:

[T.98] $C(\mathbf{IID_1D_1})D \cdot \mathbf{sgr_1}(C, D, E) \cdot \mathbf{CI_3}(C, D, E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{ID_1D_1I})E.$

[T.99] $C(\mathbf{IID_1D_1})D \cdot \mathbf{sgr_4}(C, D, E) \cdot \mathbf{CI_3}(C, D, E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{D_1ID_1I})E.$

[T.100] $C(\mathbf{IID_1D_1})D \cdot \mathbf{sgr_2}(C, D, E) \cdot \mathbf{CI_3}(C, D, E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{IID_1D_1})E.$

[T.101] $C(\mathbf{IID_1D_1})D \cdot \mathbf{sgr_3}(C, D, E) \cdot \mathbf{CI_3}(C, D, E) \cdot \supset \cdot C(\mathbf{IID_1D_1})E.$

Los dos próximos teoremas evidencian cómo A y B en T.90 están conectados con E en T.98 y T.99:

[T.102] $A(\mathbf{ID_1ID_1})C \cdot C(\mathbf{ID_1ID_1})E \cdot \mathbf{CI_3}(A, C, E) \cdot \supset \cdot A(\mathbf{IIII})E.$

[T.103] $B(\mathbf{D_1IID_1})C \cdot C(\mathbf{D_1ID_1I})E \cdot \mathbf{CI_3}(B, C, E) \cdot \supset \cdot B(\mathbf{IIII})E.$

Si combinamos ahora T.90, T.102 y T.103, obtenemos:

[T.104] $A(\mathbf{D_1D_1II})B \cdot \mathbf{SEC}(A,B,C) \cdot \mathbf{SEC}(C,D,E) \cdot \supset \cdot A\mathbf{Dup_0}E \vee B\mathbf{Dup_0}E \vee C\mathbf{Dup_1}E.$

Formulado en términos de clases de equivalencia de $\mathbf{Dup_0}$ y $\mathbf{Dup_1}$ esto significa que tenemos:

$$E \in \emptyset \cup \Psi \cup \theta.$$

Concluimos por lo tanto, que nuestro ejemplo de sistema de reproducción $\mathbf{BS_1}$ tiene sólo tres miembros.

Este resultado parece estar de acuerdo con el procedimiento típico mendeliano. Pero existe una complicación que no ha sido todavía mencionada. Hasta el momento hemos tenido $A \in \emptyset$ y $B \in \Psi$, y a partir de $A\,(\mathbf{D_1D_1II})\,B$ con **SEC** (A, B, C) hemos asignado la designación 'θ' a C; y hemos supuesto tácitamente que si tenemos $B\,(\mathbf{D_1D_1II})\,A$ y **SEC** (B, A, C′) podemos también tener $C' \in \theta$, tratándolos por lo tanto como genéticamente indistinguibles. Este supuesto recibe posiblemente apoyo por la ocurrencia de indistinguibilidad fenotípica.

Pero podemos encontrar fundamentos para reconocer la distinguibilidad si volvemos al principio de nuestras consideraciones referentes a $\mathbf{BS_1}$ y recordamos lo que se decía sobre las relaciones de representación. Vemos entonces que existe un par **Cor** $\{\alpha, \gamma\}$ tal que $\mathbf{Rep_1}(\alpha, \alpha, A)$ y $\mathbf{Rep_1}(\gamma, \gamma, B)$, cuando $A \in \emptyset$, y $B \in \Psi$. Si A es el productor del gameto masculino para C, (C_1), y B es el productor del gameto femenino para C,(C_2), entonces con **SEC** (A, B, C) tendremos $\mathbf{Rep_1}(\gamma, \alpha, C)$. Pero si la inversa es el caso y tenemos **SEC** (B, A, C′) tendremos $\mathbf{Rep}(\gamma, \alpha, C')$. Podemos ver ahora una posibilidad de que esta distinción pueda ser importante: a saber, cuando autosomas de una clase dada reaccionan diferentemente en un ambiente que contiene el citoplasma de un gameto masculino, a la forma en que reaccionan en un ambiente que contiene el citoplasma de un gameto femenino. Llamaremos a los conjuntos que se diferencian de esta forma *inversos* entre sí, porque el orden de las clases de equivalencia de **Ia** que ocurren en sus relaciones de representación está invertido. Si θ es cualquier Equ $(\mathbf{Dup}_n)$ para algún valor de n, entonces θ^* será su inverso. Pero si θ^* es un Equ $(\mathbf{Dup}_n)$, entonces $\theta^{**} = \theta$.

Podemos ahora construir una pequeña tabla para las relaciones entre los miembros de un $\mathbf{BS_1}$ cuando el conjunto inicial es $\{\emptyset, \Psi\}$ y la totalidad de los miembros es $\{\emptyset, \Psi, \theta, \theta^*\}$.

	$\emptyset$	Ψ
$\emptyset$	$\emptyset$	θ^*
Ψ	θ	Ψ

Se intenta evidenciar lo que pasa cuando, dado **SEC** (A, B, C), A es un miembro de uno de los conjuntos del sistema indicado en la fila superior, y B es un miembro de uno de los que hay en la columna de la izquierda. C pertenece al conjunto indicado por la intersección de filas y columnas. También debe recordarse que el sistema tiene una base en un único par **Cor**.

Debemos pasar ahora a los sistemas de reproducción pertenecientes al conjunto $\mathbf{BS}_2$. Aquí cada sistema tiene una base autosómica de *dos* pares **Cor**: en primer lugar tenemos un par $\{\alpha, \gamma\}$ tal que para algunos x, y tenemos $\alpha\mathbf{Cor}(x,y)\gamma$ y luego otro par $\{\beta, \delta\}$ tal que para algunos x, y tenemos $\beta\mathbf{Cor}(x, y)\delta$. Sobre esta base tendremos *cuatro* miembros en el conjunto inicial:

$$\emptyset^1 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\alpha, \beta, \alpha, \beta, A)\}; \quad \emptyset^2 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\alpha, \delta, \alpha, \delta, A)\};$$

$$\emptyset^3 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\gamma, \beta, \gamma, \beta, A)\}; \quad \emptyset^4 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\gamma, \delta, \gamma, \delta, A)\}.$$

Los restantes miembros del sistema son los conjuntos sucesores de miembros del conjunto inicial. A éstos les asignamos las siguientes designaciones:

$$\Psi^1 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\alpha, \beta, \alpha, \delta, A)\}; \quad \Psi^2 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\alpha, \beta, \gamma, \beta, A)\};$$

$$\Psi^3 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\alpha, \delta, \gamma, \delta, A)\}; \quad \Psi^4 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}_2(\gamma, \beta, \gamma, \delta, A)\}.$$

Cada uno de estos conjuntos tiene un inverso, perteneciente también al sistema:

$$\Psi^{1*}, \Psi^{2*}, \Psi^{3*} \text{ y } \Psi^{4*}.$$

Finalmente tenemos cuatro conjuntos más, en cada uno de los cuales están representados todos los conjuntos de los cuatro autosomas:

$$\theta^1 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, A)\}; \quad \theta^{1*} = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}(\gamma, \delta, \alpha, \beta, A)\};$$

$$\theta^2 = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}(\alpha, \delta, \gamma, \beta, A)\}; \quad \theta^{2*} = \widehat{A}\{\mathbf{Rep}(\gamma, \beta, \alpha, \delta, A)\}.$$

En orden a probar la derivación de estos conjuntos de sucesores a partir de miembros del conjunto inicial requerimos una relación de segregación que trate también con los conjuntos de autosomas pertenecientes a los dos pares **Cor**. Daremos la definición general para esta relación, que es bastante larga y complicada; pero, en el contexto en que se usará de aquí en adelante, se encontrará que es considerablemente más simple, debido a la frecuencia con que se da **Iag** entre los gametos envueltos.

Para esta nueva relación usamos el signo '$\mathbf{Sgr}_2$' de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}[D.48]\quad \mathbf{Sgr}_2 = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\{\mathbf{prd}(A, B, C) : (\exists\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta') : \\ : \alpha\mathbf{Cor}(A_1, A_2)\gamma \cdot \alpha'\mathbf{Cor}(B_1, B_2)\gamma' \cdot \beta\mathbf{Cor}(A_1, A_2)\delta \cdot \beta'\mathbf{Cor}(B_1, B_2)\delta' \\ \mathbf{Rep}_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, A) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha', \beta', \gamma', \delta', B) : \\ : \mathbf{rep}_2(\alpha, \beta, C_1) \vee \mathbf{rep}_2(\alpha, \delta, C_1) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma, \beta, C_1) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma, \delta, C_1) : \\ : \mathbf{rep}_2(\alpha', \beta', C_2) \vee \mathbf{rep}_2(\alpha', \delta', C_2) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma', \beta', C_2) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma', \delta', C_2) \\ \alpha \cap \gamma = \beta \cap \delta = \Lambda\alpha' \cap \gamma' = \beta' \cap \delta' = \Lambda\}.\end{aligned}$$

También necesitaremos combinar esta relación de segregación con **EI** y $\mathbf{CI}_3$, como hicimos con **Sgr**; de acuerdo con esto añadimos la próxima definición:

$$[D.49] \qquad \mathbf{SEC}_2 = \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{C}\{\mathbf{Sgr}_2(A, B, C) \cdot \mathbf{EI}(A, B, C) \cdot \mathbf{CI}_3(A, B, C)\}.$$

Lo que sigue son algunos teoremas que pueden probarse con la ayuda de las Definiciones 48 y 49:

[T.105] $\mathbf{SEC}_2(A,B,C) \cdot A(\mathbf{IIII})B \cdot \supset \cdot (\exists \alpha,\beta) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\alpha,\beta,A) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\alpha,\beta,B) \cdot$
$\cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_1) \cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_2).$

[T.106] $\mathbf{SEC}_2(A,B,C) \cdot A(\mathbf{D_1D_1II})B \cdot \supset \cdot (\exists \alpha,\beta,\gamma) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\alpha,\beta,A) \cdot$
$\cdot \mathbf{Rep}_2(\gamma,\beta,\gamma,\beta,B) \cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_1) \cdot \mathbf{rep}_2(\gamma,\beta,C_2).$

[T.107] $\mathbf{SEC}_2(A,B,C) \cdot A(\mathbf{ID_1ID_1})B \cdot \supset \cdot (\exists \alpha,\beta,\gamma) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\alpha,\beta,A) \cdot$
$\cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\gamma,\beta,B) \cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_1) \cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_2) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma,\beta,C_2).$

[T.108] $\mathbf{SEC}_2(A,B,C) \cdot A(\mathbf{IID_1D_1})B \cdot \supset \cdot (\exists \alpha,\beta,\gamma) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\gamma,\beta,A) \cdot$
$\cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\gamma,\beta,B) \cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_1) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma,\beta,C_1) \cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_2) \vee$
$\vee \mathbf{rep}_2(\gamma,\beta,C_2).$

[T.109] $\mathbf{SEC}_2(A,B,C) \cdot A(\mathbf{D_2D_2II})B \cdot \supset \cdot (\exists \alpha,\beta,\gamma,\delta) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\alpha,\beta,A) \cdot$
$\cdot \mathbf{Rep}_2(\gamma,\delta,\gamma,\delta,B) \cdot \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_1) \cdot \mathbf{rep}_2(\gamma,\delta,C_2).$

[T.110] $\mathbf{SEC}_2(A,B,C) \cdot A(\mathbf{IID_2D_2})B \cdot \supset \cdot (\exists \alpha,\beta,\gamma,\delta) \cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A) \cdot$
$\cdot \mathbf{Rep}_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,B) : \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_1) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma,\delta,C_1) \vee \mathbf{rep}_2(\alpha,\delta,C_1) \vee$
$\vee \mathbf{rep}_2(\gamma,\beta,C_1) : \mathbf{rep}_2(\alpha,\beta,C_2) \vee \mathbf{rep}_2(\gamma,\delta.C_2) \vee \mathbf{rep}_2(\alpha,\delta,C_2) \vee$
$\vee \mathbf{rep}_2(\gamma,\beta,C_2).$

Como estamos ahora tratando principalmente con clases de equivalencia de las relaciones de duplicación, que son conjuntos de tétradas genéticas, se hace necesario definir funciones sucesor para usar con conjuntos de esta clase. La definición siguiente satisface este requisito:

[D.49] $\mathbf{Suc}_{m,n}(\emptyset,\Psi) = C\{\emptyset \in \mathrm{Equ}(\mathbf{Dup}_m) \cdot \Psi \in \mathrm{Equ}(\mathbf{Dup}_n) \cdot (\exists A,B) \cdot A \in \emptyset \cdot B \in \Psi \cdot$
$\cdot \mathbf{SEC}_2(A,B,C)\}.$

En esta conexión es de interés el siguiente teorema:

[T.111] $A\mathbf{Dup}_m B \cdot B\mathbf{Dup}_n C \cdot \supset \cdot m = n$ (ver D.37 y T.68).

La definición que sigue proporciona una reducción para aquellos casos en que los subíndices numéricos sean idénticos:

[D.50] $\mathbf{Suc}_n(\emptyset,\Psi) = \widehat{C}\{\emptyset,\Psi \in \mathrm{Equ}(\mathbf{Dup}_n) \cdot (\exists A,B) \cdot A \in \emptyset \cdot B \in \Psi \cdot$
$\cdot \mathbf{SEC}_2(A,B,C)\}.$

El siguiente teorema es un lema que se usa en la demostración de los teoremas que le siguen inmediatamente:

[T.112] $\emptyset^1[\mathbf{D_1D_1II}]\emptyset^2 \cdot C \in \mathbf{Suc}_0(\emptyset^1,\emptyset^2) \cdot \supset \cdot (\exists A,B) \cdot \mathbf{SEC}_2(A,B,C) \cdot$
$\cdot A(\mathbf{D_1D_1II})B.$

Se pueden probar teoremas correspondientes para relaciones gaméticamente especificadas distintas de $(\mathbf{D_1 D_1 II})$. Los teoremas que siguen a continuación muestran cómo pueden ser derivados, con la ayuda de los Teoremas 105 a 110 y el lema T.112, los conjuntos sucesores a partir de los miembros del conjunto inicial de un $\mathbf{BS_2}$.

[T.113] $\quad \emptyset^1\,[\mathbf{D_1 D_1 II}]\,\emptyset^2 \cdot \psi^1 = \widehat{A}\,\{\mathbf{Rep}_2(\alpha, \beta, \alpha, \delta, A) \cdot \supset \cdot \mathbf{Suc}_0(\emptyset^1, \emptyset^2) \subset \psi^1\}.$

Este teorema afirma que si los dos primeros miembros del conjunto inicial de un $\mathbf{BS_2}$ están mutuamente en $[\mathbf{D_1 D_1 II}]$, entonces su sucesor estará incluido en este miembro del sistema de reproducción designado por 'ψ^1'. Estrictamente hablando no es necesario incluir la definición de ψ^1, porque ha sido ya dada; pero ha sido incluida en T.113 para dejar el asunto más claro.

[T.114] $\quad \emptyset^1\,[\mathbf{D_2 D_2 II}]\,\emptyset^4 \cdot \supset \cdot \mathbf{Suc}_0(\emptyset^1, \emptyset^4) \subset \theta^1.$

[T.115] $\quad \emptyset^1\,[\mathbf{ID_1 ID_1}]\,\psi^1 \cdot \supset \cdot \mathbf{Suc}_{0,1}(\emptyset^1, \psi^1) \subset \emptyset^1 \cup \psi^1.$

[T.116] $\quad \emptyset^1\,[\mathbf{ID_2 ID_2}]\,\theta^1 \cdot \supset \cdot \mathbf{Suc}_{0,2}(\emptyset^1, \theta^1) \subset \emptyset^1 \cup \theta^1 \cup \psi^1 \cup \psi^2.$

Se puede probar que los sucesores de θ con θ incluyen miembros pertenecientes a *todos* los miembros del sistema; de la misma forma que los correspondientes miembros del ejemplo dado de un $\mathbf{BS_1}$ producen miembros de todos los conjuntos del sistema. Pero con $\mathbf{BS_2}$ se dan dieciséis miembros.

Las restantes relaciones sucesor pueden ser mostradas más convenientemente en la siguiente tabla.

	$\emptyset^1$	$\emptyset^2$	$\emptyset^3$	$\emptyset^4$
$\emptyset^1$	$\emptyset^1$ [IIII] ED_0	ψ^{1*} $[D_1 D_1 II]$ ED_1	ψ^{2*} $[D_1 D_1 II]$ ED_1	θ^{1*} $[D_2 D_2 II]$ ED_2
$\emptyset^2$	ψ^1 $[D_1 D_1 II]$ ED_1	$\emptyset^2$ [IIII] ED_0	θ^{2*} $[D_2 D_2 II]$ ED_2	ψ^{3*} $[D_1 D_1 II]$ ED_1
$\emptyset^3$	ψ^2 $[D_1 D_1 II]$ ED_1	θ^2 $[D_2 D_2 II]$ ED_2	$\emptyset^3$ [IIII] ED_0	ψ^4 $[D_1 D_1 II]$ ED_1
$\emptyset^4$	θ^1 $[D_2 D_2 II]$ ED_2	ψ^3 $[D_1 D_1 II]$ ED_1	ψ^4 $[D_1 D_1 II]$ ED_1	$\emptyset^4$ [IIII] ED_0

En esta tabla, en la fila superior, se dan las designaciones de los cuatro miembros del conjunto inicial de un sistema de reproducción perteneciente a $\mathbf{BS}_2$. En la columna de la izquierda se dan las mismas designaciones. En cada cuadrado se dan tres tipos de información:

1) en la esquina superior izquierda tenemos la designación del conjunto sucesor de los miembros del conjunto inicial indicado en la parte superior de la columna y en la parte izquierda de la fila;
2) en el centro se da la relación gaméticamente especificada que guardan entre sí los dos conjuntos predecesores;
3) en la esquina inferior derecha se indica la clase de equivalencia de $\mathbf{Dup}_{0,1,2}$ a la que pertenece el conjunto sucesor ($\mathbf{ED}_0$ es una abreviatura de 'Equ ($\mathbf{Dup}_0$)', etc.).

Es evidente que los conjuntos $\{\emptyset^1, \emptyset^2, \Psi^1, \Psi^{1*}\}$ y $\{\emptyset^3, \emptyset^4, \Psi^4, \Psi^{4*}\}$ son subconjuntos, del sistema total, que son a la vez sistemas de reproducción pertenecientes a $\mathbf{BS}_1$.

El sistema total es: $\{\emptyset^1, \emptyset^2, \emptyset^3, \emptyset^4, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3, \Psi^4, \Psi^{1*}, \Psi^{2*}, \Psi^{3*}, \Psi^{4*}, \theta^1, \theta^{1*}, \theta^2, \theta^{2*}\}$.

Como conclusión hagamos un breve resumen de lo que este sistema axiomático nos ha enseñado. Empezamos con gametos, biontes completos y ambientes conectados por tres relaciones: la relación triádica gameto-productor, la relación tetrádica de unión y la relación de indistinguibilidad genética entre ambientes. A partir de éstas hemos podido definir las unidades sintéticas que hemos llamado tétradas genéticas, y la relación triádica de predecesor entre tales tétradas.

Se ha sugerido que la síntesis es tan importante en ciencia natural como el análisis. El uso que aquí se hace de relaciones poliádicas parece aportar algún apoyo a esta sugerencia.*

Se hizo después necesario, con vistas al tratamiento de la diversidad genética entre gametos, introducir nuevas nociones no definidas; a saber, las partes de los gametos llamadas autosomas y las partes llamadas citoplasmas, y también relaciones de indistinguibilidad genética entre tales partes; y la relación de correspondencia entre autosomas pertenecientes a distintos gametos. Con estas adiciones se hizo posible definir la indistinguibilidad genética entre gametos y entre biontes completos, y también los tipos de diversidad gamética. Con estas nuevas ayudas hemos podido definir relaciones de duplicación entre tétradas genéticas. Lo cual resultó ser bastante complicado debido al hecho de que no hay sólo una relación de duplicación sino muchas, dependiendo del grado de diversidad gamética interna entre las tétradas genéticas correspondientes. Cada una de estas relaciones es simétrica y transitiva, y por lo tanto tiene una clase de equivalencia asociada a ella. En la siguiente tabla mostramos cómo se distribuyen entre los conjuntos de aquellas clases a las que hemos llamado sistemas de reproducción.

---

* La noción de tétrada genética proporciona un buen ejemplo de lo que A. N. Whitehead llamaba un suceso.

	$\mathbf{ED}_0$	$\mathbf{ED}_1$	$\mathbf{ED}_2$	$\mathbf{ED}_3$	·	$\mathbf{ED}_r$	·	$\mathbf{ED}_n$
$\mathbf{BS}_0$	1	0	0	0				
$\mathbf{BS}_1$	2	2	0	0				
$\mathbf{BS}_2$	4	8	4	0				
$\mathbf{BS}_3$	8	24	24	8				
·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\mathbf{BS}_n$	2^n	$\binom{n}{1}2^n$	$\binom{n}{2}2^n$	$\binom{n}{3}2^n$	· · ·	$\binom{n}{r}2^n$	·	2^n

Esta tabla muestra cuántas clases de equivalencia de las sucesivas relaciones de duplicación se dan en los cuatro primeros miembros de la sucesión de los sistemas de reproducción. La fila inferior muestra la fórmula general para el n-simo miembro de esta sucesión. Las clases de equivalencia de las relaciones de duplicación son conjuntos de tétradas genéticas. Los sistemas de reproducción son conjuntos de clases de equivalencia basadas en pares de clases de equivalencia de la relación **Ia** entre autosomas; el número de tales pares en un sistema dado queda indicado por el índice numérico en su designación.

Concluimos ahora con dos teoremas relativos a las relaciones de duplicación:

[T.114] $\mathbf{Dup}_n \cap \mathbf{Dup}_m \neq \Lambda \cdot \supset \cdot n = m$ (véanse D.37, D.35 y T.68).

[T.115] $\mathrm{Equ}(\mathbf{Dup}_n) \cap \mathrm{Equ}(\mathbf{Dup}_m) \neq \Lambda \cdot \supset \cdot n = m$ (T.114).

NOTAS AL CAPITULO V.

El propósito de estas notas es proporcionar información adicional sobre tópicos que tal vez no sean demasiado familiares al lector.

Nota 1.–Ambientes de los gametos:

Es un tópico sobre el que se ha dicho muy poco. La razón es que se supone tácitamente que si hay diversidad entre los ambientes de los gametos, ello tendrá su contrapartida en una diversidad entre los ambientes de los biontes de las relativas tétradas genéticas correspondientes; de suerte que, si no hay diversidad entre los ambientes de los biontes, no habrá diversidad entre los ambientes de los gametos producidos. Lo cual significará que cuando se usa la relación **SEC**, cualquier diversidad de los gametos será una diversidad de autosomas o citoplasmas (véanse D.47 y D.49); pero como la diversidad citoplasmática también queda excluida por esta relación, no nos queda más que una sola clase de diversidad entre gametos. Este es un tópico que requiere un mayor estudio.

Nota 2.–Demostración del Teorema 24:

Para hacer esta demostración más corta y más clara necesitamos usar las siguientes abreviaturas: pongamos 'α' para '**auts**(x)', 'β' para '**auts**(y)', 'γ' para '**auts**(z)' y 'R' para '**CA**' (véase D.14 de **Iag**).

Primero debemos demostrar el siguiente lema:

$$\alpha \subset \mathrm{R}``\beta \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot \supset \cdot \beta \neq \Lambda.$$

(i) $\alpha \subset \mathrm{R}``\beta \cdot \supset \cdot u \in \alpha \cdot \supset \cdot (\exists v) \cdot v \in \beta \cdot u \mathrm{R} v$ (por D.*37.01 Princ.Mathe.).

(ii) $\alpha \neq \Lambda \cdot \supset : (\exists u) \cdot u \in \alpha$ (por Df. Λ).

(iii) $\alpha \subset \mathrm{R}``\beta \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot \supset \cdot (\exists v) \cdot v \in \beta$ (por (i) y (ii)).

(iv) $(\exists v) \cdot v \in \beta \cdot \supset \cdot \beta \neq \Lambda.$ (por Df. Λ).

Ahora probamos que **Iag** es simétrica:

(v) $x \, \mathbf{Iag} y \supset : \alpha \subset \mathrm{R}``\beta \cdot \beta \subset \mathrm{R}``\alpha$ (por D.24 y abreviaturas).

(vi) $x \, \mathbf{Iag} y \supset : \beta \subset \mathrm{R}``\alpha \cdot \alpha \subset \mathrm{R}``\beta$ (como consecuencia de (v)).

(vii) $x \, \mathbf{Iag} y \cdot \supset \cdot \alpha \neq \Lambda.$

(viii) $\alpha \subset \mathrm{R}``\beta \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot \supset \cdot \beta \neq \Lambda$ (lema).

(ix) $\beta \subset \mathrm{R}``\alpha \cdot \alpha \subset \mathrm{R}``\beta \cdot \beta \neq \Lambda \cdot \supset \cdot y \, \mathbf{Iag} x$ (por D.24 y abreviaturas).

(x) $x\,\mathbf{lag}y \supset y\,\mathbf{lag}x$ (por (v) . . . (ix)).

Hemos, pues, probado que **lag** es simétrica; ahora probamos que es transitiva:

(xi) $y\,\mathbf{lag}z \supset \beta \subset R``\gamma \cdot \gamma \subset R``\beta \cdot \beta \neq \Lambda$ (por D.24, etc.).

(xii) $\beta \neq \Lambda \cdot \beta \subset R``\gamma \supset \gamma \neq \Lambda$ (lema).

(xiii) $\alpha \subset R``\beta \cdot \beta \subset R``\gamma \cdot \supset \cdot \alpha \subset R``\gamma$ (por transitividad de inclusión).

(xiv) $\gamma \subset R``\beta \cdot \beta \subset R``\alpha \cdot \supset \cdot \gamma \subset R``\alpha$ (por transitividad de inclusión).

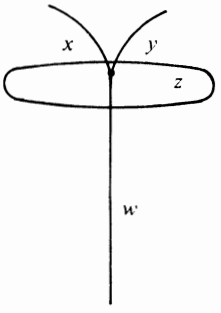
(xv) $\alpha \subset R``\gamma \cdot \gamma \subset R``\alpha \cdot \alpha \neq \Lambda \cdot \supset \cdot x\,\mathbf{lag}z$ (por D.24, etc.).

(xvi) $x\,\mathbf{lag}y \cdot y\,\mathbf{lag}z \cdot \supset \cdot x\,\mathbf{lag}z$

Hemos, pues, probado que **lag** es transitiva.

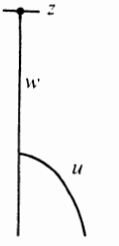
Nota 3.–Diagramas:

1. Diagrama de una Tétrada Genética



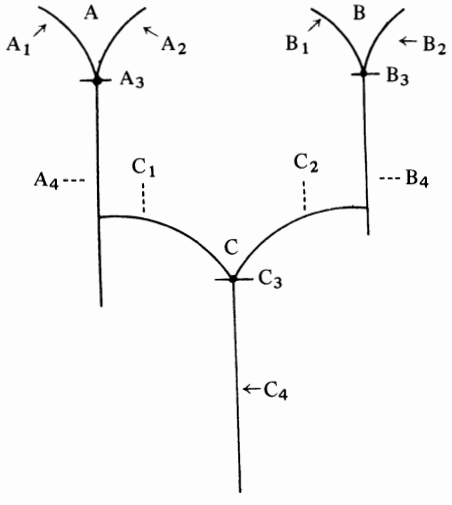
unc (*x*, *y*, *z*, *w*)

2. Diagrama de la Relación Productor



prc (*z*, *w*, *u*)

3. Diagrama de la Relación Predecesor



prd (A, B, C)

Los diagramas anteriores fueron derivados originalmente de los diagramas de Minkowski de cosas extendidas en el tiempo. Las líneas verticales representan biontes completos. Las dos curvas cortas en la parte superior de las líneas verticales representan los dos gametos. La elipse en el primer diagrama representa el ambiente del bionte completo, que es una esfera de un diámetro tal que contiene todo lo que puede tener un efecto sobre el bionte en algún estadio de su longitud

temporal. En los otros diagramas, el ambiente está representado sólo por una corta línea horizontal. Se da más información sobre estos diagramas en el artículo del autor titulado "Many-termed Relations in Biology", publicado en *Acta Biotheoretica*, Vol. XVIII, 1968.

Nota 4.–Proporciones numéricas:

No se dice nada en el texto sobre las proporciones numéricas en las que los sucesores de diferentes tipos aparecen en sistemas de reproducción. Se ha hecho esto para dar más énfasis a la importancia primaria de las diferentes *clases*. En la obra de Mendel y en los modernos libros de texto parece dársele gran prominencia a las proporciones relativas o razones en las que aparecen estas diferentes clases. Y aunque en la práctica estas razones actuales no aparecen, y aunque son muy aproximadas a ellas, algunos estadísticos se han quejado de que el jardinero había hecho trampa.

Nota 5.–Caracteres y fenotipos:

No se ha dicho nada en el Capítulo V sobre caracteres y fenotipos. Se ha hecho así para dar más énfasis al extremo de que los caracteres, como tales, no pertenecen a la teoría genética. Hay que buscar su importancia en la medicina, la horticultura, la agricultura y la taxonomía. Pero son requeridos, no obstante, como ayuda para reconocer y distinguir los miembros de las varias clases de equivalencia de biontes utilizadas en experimentos que pretenden comprobar teorías genéticas. El problema de la relación exacta entre indistinguibilidad genética e indistinguibilidad fenotípica parece ser de los que requieren mucho más trabajo. El presente sistema no tiene nada que ofrecer en esta conexión. El concepto de familia fenotípica podía haber sido tomado del Capítulo IV y usado aquí, pero quedarían todavía muchas preguntas sin contestación. En su libro titulado *Mendel's Principles of Heredity*, W. Bateson añade una nota interesante (en la página 332) a un pasaje de su traducción del escrito de Mendel de 1866. Ese pasaje dice así: 'En los experimentos antes descritos se usaron plantas que diferían sólo en un carácter esencial'. La nota de Bateson es como sigue:

> [Esta afirmación de Mendel a la luz de los conocimientos actuales deja lugar a algún error. Aunque su trabajo evidencia que tales variedades pueden existir, es muy improbable que Mendel pudiera haber tenido siete pares de variedades tales que los miembros de cada par se diferenciaran uno del otro *sólo* en un carácter considerable (*wesentliches Merkmal*). Las consecuencias de este punto pueden ser pequeñas teórica o prácticamente, pero se le da gran importancia al "wesentlich"].

Por desgracia, Bateson no insiste en este tema posteriormente. Pero parece sugerir que un *wesentlich Merkmal* es un rasgo que sólo se manifiesta en una tétrada genética A cuando A_1, A_2 y A_3 satisfacen ciertos requisitos, mientras que un carácter no-esencial puede llegar a manifestarse bajo una gama más amplia de diversidad ambiental. Pero es muy difícil ser preciso sobre tales cuestiones sin un amplio trabajo preparatorio. Y este trabajo todavía no ha sido abordado.

APÉNDICE B

CONTRIBUCION LINGÜISTICA AL ESTUDIO DE LA EVOLUCION.

El progreso del arte del descubrimiento racional depende, en parte, del arte de la característica (*ars characteristica*). La razón de que la gente busque ordinariamente las demostraciones sólo en números y líneas o en cosas susceptibles de ser representadas por números y líneas, no es otra sino que, fuera de los números, no existen caracteres adecuados que correspondan a los conceptos. (Leibniz).

Cuando se publicó la primera obra de Boole, habían transcurrido ya 131 años desde la muerte de Leibniz; y luego hubieron de transcurrir otros 32 antes de que Frege publicase su *Begriffsschrift*. Hoy día, 234 años después de la muerte de Leibniz, parece más que llegado el momento de que empecemos a hacer uso de la obra de esos hombres y de sus sucesores, con vistas a la 'búsqueda de demostraciones' en biología. Este apéndice mostrará cómo es posible realizar un tal comienzo en lo referente a problemas relativos a la evolución.*

Lo que se expone en el presente apéndice comenzó siendo un intento de reconciliar dos aspectos, aparentemente conflictivos, de los conceptos de evolución y clasificación. En primer lugar tenemos el énfasis que puso Darwin en subrayar la *gradualidad* de la evolución, estimando que se requerían unas 1.000 generaciones para pasar de una variedad a otra, unas 10.000 para pasar de una a otra especie, y números correlativamente mayores para categorías taxonómicas más amplias. Sin embargo, al reflexionar sobre la materia, parecióme más bien preciso que el paso de una a otra categoría taxonómica (sea reducida o grande su amplitud) se dé en *una* generación, en el sentido de que tiene que haber al menos dos organismos, x e y, tales que x es padre de y, y x pertenece a una categoría, digamos especie o género, e y a otra distinta de la primera. ¿Cómo se reconcilia esto con las 10.000 generaciones de Darwin?

Un segundo punto es el siguiente. El sistema taxonómico es, usualmente, descrito como un sistema de categorías taxonómicas o conjuntos tales que, si tomamos dos cualesquiera de ellos, entonces o bien uno de los dos está totalmente contenido en el otro, o bien ambos carecen de miembros que les sean comunes. Así, por ejemplo, los carnívoros y los ungulados se encuentran ambos contenidos dentro de los mamíferos, pero carecen de miembros comunes entre sí. No obstante, si consideramos los conjuntos taxonómicos en su extensión temporal y en conexión con la idea de gradualidad de la evolución, ¿no tendrá

---

* Al decir esto no olvido el espléndido trabajo llevado a cabo por los profesores Fisher, Haldane y S. Wright en la búsqueda de demostraciones relativas a problemas de evolución con ayuda de la matemática tradicional. Unicamente insisto en que es urgente ir algo más lejos y aplicar a estos problemas, en todos sus aspectos, ese mismo trabajo con ayuda de la matemática no tradicional.

que darse, por ventura, algún tipo de entrecruzamiento? Al presente, los anfibios y los reptiles carecen de miembros comunes, pero ¿acaso no nos fuerza la teoría de la evolución a suponer que los han tenido en un determinado momento del pasado? Ello conduce a este problema: ¿qué representan, exactamente, los sistemas de líneas bifurcadas que a veces encontramos en los tratados de biología bajo el nombre de 'árboles filogenéticos'?

Tal fue mi punto de partida. Mas al ir adelantando en el trabajo, díme cuenta de que lo que estaba haciendo no era sino construir un sistema de postulados análogo a los que encontramos en geometría. Pues justo del mismo modo que cabe hablar en esta ciencia de diferentes geometrías según sea nuestra elección de postulados, así también cabe hablar de diferentes teorías de la evolución de acuerdo con nuestra elección de postulados evolutivos. Nuestro problema, en última instancia, consiste en hallar, al menos, un conjunto de postulados que sea consistente con la totalidad de los datos que poseemos sobre procesos evolutivos. Ningún intento, empero, de hallar ese conjunto se llevará a cabo aquí. Unicamente se propondrán unos cuantos postulados, a título de ilustración y debate.

Para acometer esta tarea me ha resultado necesario desarrollar una rama especial de la teoría de conjuntos, a la que denomino teoría de la unión de conjuntos mediante relaciones de uno-a-uno con campos finitos. Comenzaremos, en consecuencia, por olvidarnos de la evolución y concentrarnos en estos preliminares. Su relevancia con respecto a la evolución se evidenciará más tarde.

En primer lugar explicaré lo que entiendo por una relación de uno-a-uno con un campo finito. Obsérvese la lista acompañante de pares ordenados de números naturales. Denominemos a este conjunto la relación K.

1,2
2,3
3,4
4,5
5,6
6,7
7,8

El hecho de que el par de números 1, 2 pertenezca a dicho conjunto puede ser expresado escribiendo $1K2$, lo que puede leerse '1 está en K con 2'. El conjunto de números singulares 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se denomina el *campo* de K (en símbolos, $C(K)$). Se advertirá que cada uno de los miembros del campo está en K con, todo lo más, *uno* de los restantes, y que para cada uno de los miembros del campo hay, todo lo más, *uno* de los restantes que está en K con él. Por esta razón decimos que K es una relación de uno-a-uno (en símbolos, $K \in 1 \rightarrow 1$). Ello es asimismo verdad del siguiente conjunto de pares de números, que es un subconjunto de K, al que podemos llamar L.

1,2
3,4
5,6
7,8

Pero hay una importante diferencia entre K y L, la cual se expresa diciendo que K tiene *uno y sólo un* primer término, y *uno y sólo un* último término. El primer término o inicial de K (en símbolos $B(K)$) es el miembro del campo de esta relación respecto del cual ningún otro está en K con él; y el último término es el miembro de dicho campo que no está en K con ningún otro (en símbolos $B(\breve{K})$). L tiene cuatro iniciadores y cuatro terminales.

Hay un tercer aspecto de K que es muy importante para lo que sigue. Debido al hecho de que el campo de esta relación es finito, resulta posible pasar del primer término a todos los restantes del campo por una sucesión de pasos-K

Tabla ilustrativa de las potencias de K, K_{po} y K_*.

K^0	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8
K	1,2	2,3	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8	
K^2	1,3	2,4	3,5	4,6	5,7	6,8		
K^3	1,4	2,5	3,6	4,7	5,8			
K^4	1,5	2,6	3,7	4,8				
K^5	1,6	2,7	3,8					
K^6	1,7	2,8						
K^7	1,8							

$$K_{po} = K \cup K^2 \cup K^3 \cup K^4 \cup K^5 \cup K^6 \cup K^7.$$
$$K_* = K^0 \cup K \cup K^2 \cup K^3 \cup K^4 \cup K^5 \cup K^6 \cup K^7.$$

–de 1 a 2, de 2 a 3, y así sucesivamente. Ello se expresa diciendo que 1 está en K_{po} con respecto a todo miembro del campo a excepción de sí mismo. K_{po} es la relación consistente en estar en una cierta *potencia* de K con respecto a algo. La primera potencia de K es la propia relación K; 1 está en la segunda potencia de K (K^2) con respecto a 3, y análogamente 2 con respecto a 4; 1 está en la tercera potencia de K (K^3) con respecto a 4, en la cuarta (K^4) con respecto a 5, y así sucesivamente; K_{po} es la suma booleana de todas las potencias de K (excluyendo K^0). Si llamamos a la identidad en el campo de K la potencia cero de K (en símbolos, K^0) y añadimos esta potencia a K_{po}, tendremos una nueva relación denominada K_*. La tabla adjunta ilustra estas nociones.

Asimismo podemos representar a K por medio de una figura de flecha de la manera que sigue:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8,$$

en donde aparecen conectados por sendas flechas los pares pertenecientes a K.

Escribiendo esos pares en orden inverso,

$$8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1,$$

obtenemos un nuevo conjunto de parejas denominado la relación conversa de K (en símbolos, $\breve{K}$). Dícese de un término x que está en $\breve{K}$ con un término y, si yKx. Se advertirá que el último término de K es idéntico al primero de su conversa, al que se denota, por tanto, simbólicamente $B(\breve{K})$. Otro aspecto de nuestra relación K es que ningún término está en K consigo mismo. Por tal razón se dice que K es *irreflexiva*. Por añadidura se advertirá que, cuando un término está en K con otro, este último jamás está en K con el primero.

Por tal razón se dice que K es *asimétrica*. Finalmente, si un término está en K con un segundo, y éste a su vez lo está con un tercero, entonces el primero no está en K con el tercero. Porque si lo estuviera, la relación K no sería de uno-a-uno. Ello se expresa diciendo que K es *intransitiva*. Por otra parte, K_{po} es transitiva.

Queda, pues, explicado lo que entiendo por una relación de uno-a-uno que sea tal que su primer término esté en una cierta potencia de la relación con respecto a su último término. Comoquiera que frecuentemente tendremos ocasión de hablar acerca de semejantes relaciones, será muy útil contar con un nombre para ellas. En el presente contexto las denominaré *líneas*. Como no tendremos necesidad de usar esta palabra en ningún otro sentido, no habrá riesgo de ambigüedad. La definición formal puede escribirse:

[D.1] $R \in$ línea si y sólo si $R \in 1 \rightarrow 1 \;\&\; B(R) R_{po}\, B(\breve{R})$. *

Explicaré ahora lo que entiendo al decir que una relación de esta especie, una línea, *junta* un conjunto *con* otro. Diré que una línea R junta un conjunto X con un conjunto Y si, y sólo si, el primer término de R pertenece a $X-Y$ y el último término de R pertenece a $Y-X$ ($X-Y$ es un modo distinto de escribir $X \cap \overline{Y}$). Y escribiré al respecto $J(R, X, Y)$.

[D.2] $J(R, X, Y)$ si, y sólo si, $B(R) \in X-Y \;\&\; B(\breve{R}) \in Y-X \;\&\; R \in$ línea.

Así pues, y para volver a nuestro ejemplo, si se supone que A es el conjunto de todos los números naturales menores que 4 y B es el conjunto de todos los números naturales mayores que 3, entonces K junta A con B, puesto que su primer término es menor que 4 pero no mayor que 3 y su último término es mayor que 3 y, por ende, no menor que 4.

He aquí algunas consecuencias de las anteriores definiciones:

[T.1] Si $J(R, X, Y)$, entonces no $(X \subset Y)$ & no $(Y \subset X)$.

[T.1.11] Si $J(R, X, Y)$, entonces $X-Y \neq \Lambda \;\&\; Y-X \neq \Lambda$.

[T.1.12] No $J(R, X, X)$.

[T.1.2] Si $J(R, X, Y)$, entonces $X \neq \Lambda \;\&\; X \neq V \;\&\; Y \neq \Lambda \;\&\; Y \neq V$.

[T.1.3] Si $J(R, X, Y)$, entonces no $J(R, Y, X)$.

[T.1.4] $J(R, X, Y)$ si, y sólo si, $J(\breve{R}, Y, X)$.

---

* Dentro de la teoría de nombres participados e imparticipados, 'línea' y '$1 \rightarrow 1$' no serían nombres participados, sino abreviadores. Esto se aplica a muchos de los signos definidos en el presente apéndice. A modo de ejemplo de relación que *no* satisface a D.1, aun cuando sea de uno-a-uno y tenga un primero y un último término, considérese la relación R, definida como la relación en que está un entero x (positivo o negativo, pero excluyendo a cero) con un entero y (que satisfaga la misma condición) cuando $y = x + 1$. Entonces el primer término de $R(+1)$ no está en R_{po} con respecto al último (-1).

[T.1.5] $J(R, X, Y)$ si, y sólo si, $J(R, X-Y, Y-X)$.

(T.1.5 se sigue, puesto que $(X-Y)-(Y-X)=X-Y$ y $(Y-X)-(X-Y)=$ $=Y-X$).

Diré que una línea R junta *directamente* un conjunto X con un conjunto Y si, y sólo si, R junta X con Y y todo miembro del campo de R pertenece a X o a Y, o a ambos. Así pues:

[D.3] $Jd(R, X, Y)$ si, y sólo si, $J(R, X, Y)$ & $C(R) \subset X \cup Y$.

Procedo ahora a exponer una nueva noción, la cual es a saber, el conjunto de todos los pasos-R *de* un conjunto X *a* un conjunto Y. Denotaré a dicho conjunto por $S(R, X, Y)$. Y diré que un par x, y es un paso-R de X a Y si, y sólo si, x está en R con y y pertenece a X e y pertenece a Y.

[D.4] $x, y \in S(R, X, Y)$ si, y sólo si, xRy & $x \in X$ & $y \in Y$.

En particular, $S(R, X, \overline{X})$ será el conjunto de todos los pasos-R *fuera* de X, y $S(R, \overline{Y}, Y)$ será el conjunto de todos los pasos-R *dentro* de Y.

He aquí algunas consecuencias de estas definiciones:

[T.2] Si $Jd(R, X-Y, Y-X)$, entonces $C(R) \cap ((X \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})) = \Lambda$.

[T.2.1] Si $Jd(R, X, Y)$ & $C(R) \cap X \cap Y = \Lambda$, entonces $Jd(R, X-Y, Y-X)$.

[T.2.2] Si $Jd(R, X, Y)$ & $X \cap Y = \Lambda$, entonces $Jd(R, X-Y, Y-X)$.

[T.3] Si $J(R, X, Y)$, entonces $S(R, X, \overline{X}) \neq \Lambda$ & $S(R, \overline{Y}, Y) \neq \Lambda$.

[T.3.022] $S(R, X, \overline{X}) \cap S(R, \overline{Y}, Y) \subset S(R, X, Y)$.

[T.3.032] Si $C(R) \cap X \cap Y = \Lambda$, entonces $S(R, X, Y) = S(R, X-Y, Y-X)$.

[T.3.033] Si $C(R) \cap X \cap Y = \Lambda$, entonces $S(R, X, \overline{X}) \subset S(R, X-Y, \overline{X})$ & $S(R, \overline{Y}, Y) \subset S(R, \overline{Y}, Y-X)$.

[T.3.034] Si $C(R) \subset X \cup Y$, entonces $S(R, X, \overline{X}) \subset S(R, X, Y-X)$ & $S(R, \overline{Y}, Y) \subset S(R, X-Y, Y)$.

[T.3.035] Si $C(R) \subset X \cup Y$ & $C(R) \cap X \cap Y = \Lambda$, entonces $S(R, X, Y) =$ $= S(R, X, \overline{X}) = S(R, \overline{Y}, Y) = S(R, X-Y, Y-X)$.

[T.3.22] Si $Jd(R, X, Y)$ y $S(R, X-Y, Y-X) = \Lambda$, entonces $X \cap Y \neq \Lambda$.

[T.3.32] Si $Jd(R, X-Y, Y-X)$, entonces $S(R, X, \overline{X}) = S(R, \overline{Y}, Y) =$ $= S(R, X-Y, Y-X)$.

Se dice que un conjunto X es *cerrado con respecto a* una relación R si, y sólo si, siempre que se dé un término x que esté en R con un término y que

pertenezca a X, ese término x pertenece también a X. En *Principia Mathematica*, el conjunto de términos que están en R con miembros de X es denotado por $R``X$. De acuerdo con ello, puede expresarse abreviadamente el cierre con respecto a $R$ escribiendo $R``X \subset X$.

Se dice que un conjunto Y está cerrado con respecto a la *conversa* de R si, y sólo si, siempre que se dé un término x que esté en R con un término y y pertenezca a Y, entonces el término y pertenece también a Y. Ello puede expresarse, con la notación más arriba indicada, escribiendo $\breve{R}``Y \subset Y$.

Si X es cerrado con respecto a R, entonces una vez que se sale de X por un paso-R, no es posible efectuar el retorno mediante otro paso-R; y si Y es cerrado con respecto a la conversa de R, entonces una vez que se entra en Y por un paso-R no es posible ya salir de Y por un paso-R. La condición de cierre posee, pues, el efecto de asegurar la unicidad de los pasos dentro o fuera de un conjunto dado con respecto a una relación dada. Ello se expresa en los siguientes enunciados, en los que $Nc\,(\,)$ denota el número cardinal del conjunto cuya designación ocurre dentro de los paréntesis.

[T.4] Si $J(R, X, Y) \,\&\, R``X \subset X \,\&\, \breve{R}``Y \subset Y$, entonces

$$Nc\,(S(R, X, \overline{X})) = Nc\,(S(R, \overline{Y}, Y)) = 1.$$

[T.4.01] Si $R``X \subset X$, entonces $S(R, \overline{X}, X) = \Lambda$.

[T.4.02] Si $\breve{R}``Y \subset Y$, entonces $S(R, Y, \overline{Y}) = \Lambda$.

Diré que el par x, y pertenece a la *suma* de dos líneas R y S, o que x está en $R + S$ con y si, y sólo si, el último término de R es idéntico al primer término de S y x está en R con y o en S con y.

[D.5] $xR + Sy$ si y sólo si $R \in$ línea $\,\&\, S \in$ línea $\,\&\, B(\breve{R}) = B(S) \,\&\, xRy$ o xSy.

Utilizando $D(R)$ para denotar el conjunto de todos los términos que están en R con algo, y $\mathcal{C}(R)$ para el conjunto de todos los términos respecto de los cuales alguno está en R con ellos, y empleando asimismo las correspondientes designaciones para S, podemos expresar las siguientes consecuencias:

[T.5] Si $D(R) \cap D(S) = \mathcal{C}(R) \cap \mathcal{C}(S) = \Lambda$, entonces $R + S \in 1 \to 1$.

[T.5.11] $(R \dot{+} S) = \breve{S} + \breve{R}$.

[T.5.12] Si $R \in$ línea $\,\&\, S \in$ línea $\,\&\, B(\breve{R}) = B(S)$, entonces

$$B(R) = B(R + S) \,\&\, B(\breve{S}) = B(R \dot{+} S).$$

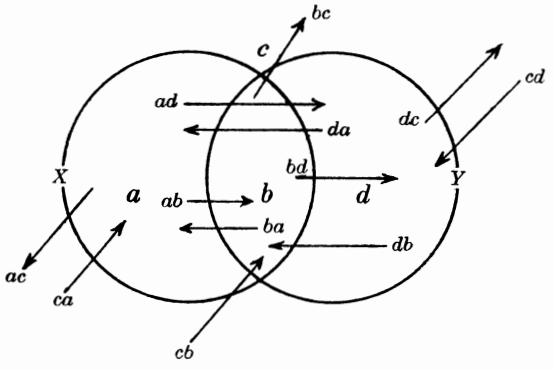
[T.5.13] Si $R \in$ línea $\,\&\, S \in$ línea $\,\&\, B(R) \neq B(\breve{S})$, entonces $R + S \neq S + R$.

[T.5.14] Si R, S y $Q \in$ línea, entonces $(R + S) + Q = R + (S + Q)$.

[T.5.15] Si $J(R, X, Y) \,\&\, J(S, Y, Z) \,\&\, X \cap Z = \Lambda \,\&\, B(\breve{R}) = B(S)$,

entonces $J(R + S, X, Z)$.

El lector empezará a preguntarse cuándo ha de llegar, si es que llega, el momento de tratar la teoría de la evolución. Pronto he de suministrar un puente que ponga en conexión esta abstracta teoría de conjuntos con la doctrina de la evolución. Pero no dejará de ofrecer interés, espero, que ello se vea precedido de una breve inquisición en torno a la variedad de modos que puedan tener dos conjuntos de juntarse mediante relaciones del tipo que he llamado líneas.*



Consideremos dos conjuntos X e Y, y denotemos a $X-Y$ por a, $X \cap Y$ por b, $Y-X$ por d y $\overline{X} \cap \overline{Y}$ por c. Denotemos asimismo por *ad* al conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer término pertenece a $X-Y$ y cuyo segundo término pertenece a $Y-X$, por *da* al conjunto de los conversos de sus pares. En tal caso, *ad* será el conjunto de líneas más cortas posibles que junta X con Y. Del mismo modo podemos definir los conjuntos *ab, ac*; *ba, bc, bd*; y *da, db, dc*. Cada uno de los cuatro sub-conjuntos del universo de discurso tiene *tres* conjuntos de pares que conducen *fuera* de él, y otros tantos de conversos de esos pares, que conducen *hacia dentro* de él. Asignemos letras mayúsculas a estos conjuntos de conjuntos de pares a la manera que sigue:

$$A = ab, ac, ad;\ B = ba, bc, bd;\ C = ca, cb, cd;\ D = da, db, dc.$$

A contiene (véase pp. 161 s.) los tres conjuntos posibles de pares iniciales para líneas que junten X con Y, y por tanto el único conjunto de pares terminales *ad*, puesto que tales pares son tanto terminales como iniciales. B, C y D no poseen conjunto de pares iniciales. Pero A, B y C poseen cada uno un conjunto de pares terminales. D no tiene par terminal.

Por sucesiva adición de pares elegidos de entre los conjuntos arriba indicados, resulta posible construir líneas de gran variedad e infinitas en número, puesto que siempre pueden ser añadidos pares adicionales y en cada caso se da siempre

* El lector que no esté interesado en este problema puede pasar a la p. 165.

una opción por un par elegido de entre tres posibles conjuntos. La adición puede ser expresada así:

$$ab + bc = abc$$

y

$$ab + bc + cd = abcd;$$

abc sería el conjunto de todas las líneas formadas añadiendo un miembro de *bc* a uno de *ab*; y *abcd* sería el conjunto de todas las líneas que son suma de tres pares tomados de *ab, bc* y *cd* respectivamente. Miembros de este conjunto juntarían X con Y.

Si suponemos que todos estos pares son sub-relaciones de una cierta relación R, y si en tal caso imponemos a R las condiciones que siguen, éstas ejercerán el efecto de limitar algunos de los modos posibles según los cuales X puede juntarse con Y.

(1) Si $R"X \subset X$ y $R^{\breve{}}"Y \subset Y$, entonces eliminamos los pares *ba, ca* y *da*, y por tanto los pares *bc* y *db*. Ello tendrá el efecto de asegurar el tráfico de X a Y solamente en una dirección. Lo que únicamente permite tres conjuntos de líneas, *ad, abd* y *acd.*

(2) Si $C(R) \subset X \cup Y$, entonces eliminamos los pares *ac, bc* y *dc*, y también *ca, cb, cd,* es decir, eliminamos todo el bloque C y sus tres conjuntos de (pares) conversos. Ello tiene el efecto de confinar el tráfico entre X e Y a estos mismos conjuntos. Lo que permite pares pertenecientes a los conjuntos *ab, ad* y *da, db* sin prohibir, por consiguiente, la oscilación, de atrás hacia delante y de delante hacia atrás, entre X e Y.

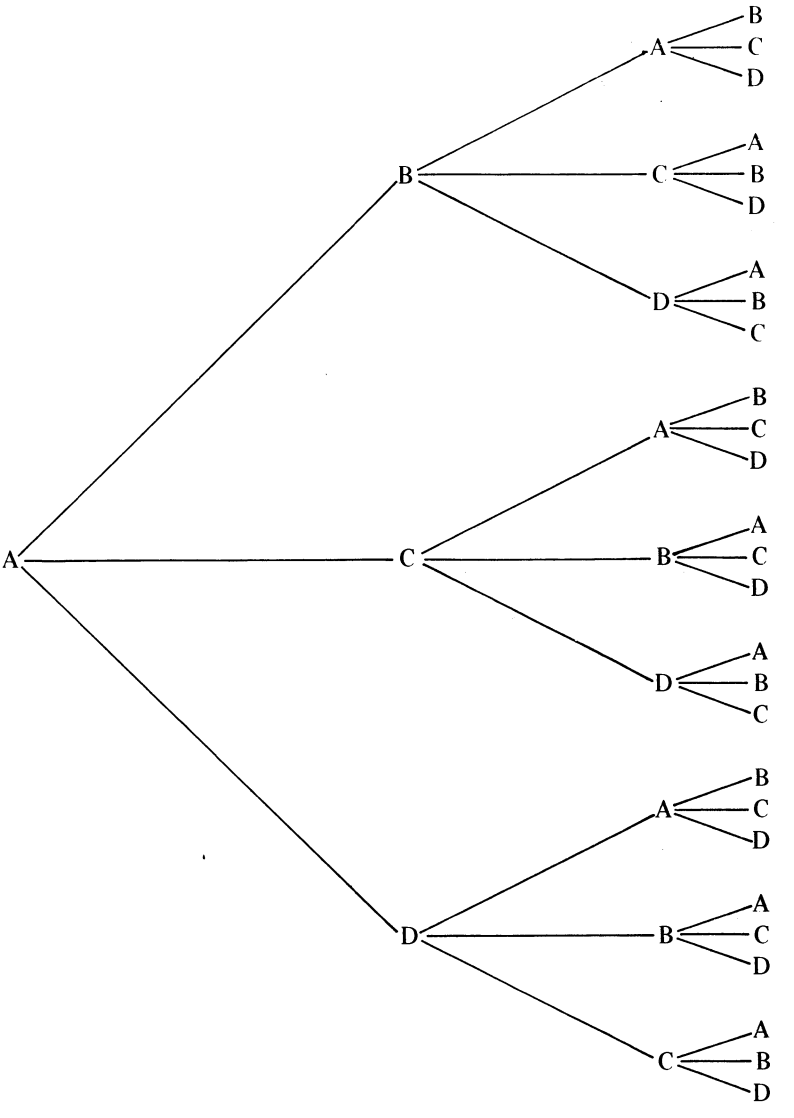
(3) Si imponemos la condición expresada por

$$\text{para todo } u \text{ y para todo } v, \text{ si } uRv \ \& \ u \in X, \text{ entonces } v \in \overline{Y},$$

entonces eliminamos todos los pares pertenecientes a *ab, bd* y *ad*. Ello deja abierto sólo el camino que pasa por *c*. De esta suerte las condiciones (2) y (3) son mutuamente exclusivas. Si vale (2), podemos decir que las líneas juntan directamente X con Y; si vale (3), podemos decir que juntan indirectamente X con Y.

(4) Si imponemos la condición $C(R) \cap X \cap Y = \Lambda$, entonces eliminamos los pares pertenecientes a los conjuntos *ab, cb, db* y a *ba, bc* y *bd*, es decir, todo el bloque B y sus conversas. Ello deja abierto el camino directo *ad*, y por tanto, el camino que pasa por *c*.

Convengamos en decir que una línea compuesta por la suma de n pares tiene una longitud n, y consideremos ahora el número de modos posibles según los cuales X puede juntarse con Y mediante líneas de una longitud dada. En lo que sigue consideraré solamente aquellas líneas que se compongan de pares de los tipos arriba indicados, esto es, de pares que salen fuera de un subconjunto para entrar en otro. Los pares puramente internos, tales como *aa, bb,* etc., serán ignorados. Puesto que A contiene todos los conjuntos de pares iniciales, y éstos terminan sólo en miembros de *b, c* y *d*, cualquier par perteneciente



a un conjunto de *A* no puede ser seguido más que por un par de un conjunto de *B*, *C* y *D*. Del mismo modo podemos decir que *B* sólo puede ser seguido por *A*, *C* y *D*; *C* sólo por *A*, *B* y *D*; y *D* sólo por *A*, *B* y *C*. Líneas de creciente longitud tienen así sus términos incluidos en conjuntos pertenecientes a conjuntos que forman una jerarquía infinita $1 \rightarrow 3$,* constituida por *A*, *B*, *C* y *D*, siendo *A* el exclusivo miembro del nivel cero de dicha jerarquía; constituyendo *B*, *C* y *D*

* Véase mi *Axiomatic Method in Biology*, pp. 42-7.

su primer nivel; y constituyendo *A, C, D* y *A, B, D* y *A, B, C* su segundo nivel, y así sucesivamente.

Ahora bien, si en una jerarquía infinita $1-k$ cada término pertenece a uno y solamente uno de $k+1$ conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}$, y los inmediatos sucesores de cada término pertenecen a los conjuntos a los que ese término *no* pertenece, y si hay m términos pertenecientes a un conjunto dado en nivel n, entonces habrá $k^n - m$ pertenecientes a ese conjunto en nivel $n+1$.

Supongamos que el miembro exclusivo de nivel 0 pertenece al conjunto X_i, de suerte que para $n=0$ tenemos $m=1$. En tal caso, para *cualquiera* de los otros conjuntos X_j $(i \neq j)$ tendremos que, para $n=0$, $m=0$; y en sucesivos niveles los valores de m serán como indica la siguiente tabla:

	X_i	X_j
n	m	m
0	1	0
1	$k^0 - 1$	$k^0 - 0$
2	$k - 0$	$k - 1$
3	$k^2 - k$	$k^2 - k + 1$
4	$k^3 - k^2 + k$	$k^3 - k^2 + k - 1$
$\vdots$		
n	$k^{n-1} - k^{n-2} + \ldots - k$ (n impar)	$k^{n-1} - k^{n-2} + \ldots - k + 1$ (n impar)
n	$k^{n-1} - k^{n-2} + \ldots + k$ (n par)	$k^{n-1} - k^{n-2} + \ldots + k - 1$ (n par)

Tomando primero X_i, si acordamos que

$$s = k^{n-1} - k^{n-2} + \ldots - k,$$

entonces

$$sk = k^n - k^{n-1} + \ldots - k^2,$$

y

$$sk + s = k^n - k;$$

por tanto

$$s = \frac{k\,(k^{n-1} - 1)}{k+1} \text{ (para } n \text{ impar)},$$

y similarmente

$$s = \frac{k\,(k^{n-1} + 1)}{k+1} \text{ (para } n \text{ par)}.$$

Estas fórmulas dan el número X_i en el n-simo nivel. Del mismo modo, para X_j, obtenemos:

$$s = k^{n-1} - k^{n-2} + \ldots - k + 1 = \frac{k^n + 1}{k + 1} \quad \text{(para } n \text{ impar)}$$

y

$$s = k^{n-1} - k^{n-2} + \ldots + k - 1 = \frac{k^n - 1}{k + 1} \quad \text{(para } n \text{ par).}$$

Estas fórmulas dan el número de X_j en el n-simo nivel.

Retornando ahora a nuestra jerarquía de A, B, C y D, se advertirá que $k = 3$ y que A corresponde a X_i, mientras que tanto B como C y D corresponden a X_j.

Denotemos por $N_A(n)$ el número de veces que figura A en el nivel n-simo de la jerarquía, y por $N_B(n)$, $N_C(n)$ y $N_D(n)$ los números correspondientes para B, C y D.

Utilicemos $N_{ad}(n)$ para denotar el número de tipos distintos de líneas de longitud n que terminan en un miembro de ad y definamos correlativamente a $N_{bd}(n)$ y $N_{cd}(n)$ con respecto a bd y cd. Siendo así tendremos

$$N_{ad}(n) = N_A(n-1), \text{ etc.}$$

y

$$N_A(n-1) + N_B(n-1) + N_C(n-1) + N_D(n-1) = 3^{n-1},$$

y por tanto,

$$N_{ad}(n) + N_{bd}(n) + N_{cd}(n) = 3^{n-1} - N_D(n-1).$$

Si ahora denotamos por $N(n)$ el número total de líneas de longitud n que terminen en ad, bd o cd, se observará que

$$N(n) = N_{ad}(n) + N_{bd}(n) + N_{cd}(n) = 3^{n-1} - N_D(n-1);$$

sin embargo

$$N_D(n+1) = 3^n - N_D(n),$$

y por tanto,

$$N_D(n) = 3^{n-1} - N_D(n-1)$$

y

$$N(n) = N_D(n).$$

Aplicando la fórmula al caso de X_j, obtenemos

$$N(n) = \frac{1}{4}(3^n + 1) \quad \text{(para } n \text{ impar),}$$

$$N(n) = \frac{1}{4}(3^n - 1) \quad \text{(para } n \text{ par),}$$

o, combinando ambas fórmulas en una,

$$N(n) = \frac{1}{4}(3^n + (-1)^{n-1}).$$

Cuando se impone la condición $C(R) \subset X \cup Y$, o la condición $C(R) \cap X \cap Y = \Lambda$, entonces la jerarquía se reduce a una jerarquía $1 \rightarrow 2$, puesto que B queda eliminado por una condición y C por la otra. Consecuentemente tenemos

$$N(n) = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n-1}).$$

La siguiente tabla indica los valores de estas funciones para valores de n que oscilen de 1 a 10:

	$N(n)$	
n	$1 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 2$
1	1	1
2	2	1
3	7	3
4	20	5
5	61	11
6	182	21
7	547	43
8	1.640	85
9	4.921	171
10	14.762	341

Así pues, X puede juntarse con Y de 14.762 modos mediante líneas compuestas de sólo diez pares, aun excluyendo aquéllas que contengan pares tales como *aa, bb,* etc., que no salen fuera de uno de los cuatro sub-conjuntos *a, b, c* y *d*.

Hasta el presente momento he venido utilizando un lenguaje que no contiene palabra ni signo que en modo alguno sea característico de la biología. He hablado de conjuntos en general, pero no de conjuntos de biontes. Mas, cuanto llevo dicho de conjuntos en general, se aplica, empero, a conjuntos *cualesquiera* y, por consiguiente, a conjuntos de biontes. A este desnudo esqueleto de lenguaje, tal como hasta aquí ha sido explicado, propongo añadir desde ahora, y uno por uno, sólo tres signos pertenecientes a la biología, lo que permitirá comprobar cuánto cabe decir con tan magra base.

El primer puente que se tiende a la biología lo suministra la *relación parental*. Denoto (en el presente contexto) a esta relación por '**P**', y entiendo por tal el conjunto de todos los pares x, y tales que x es padre de y. Esta relación es muy complicada. Un bionte puede tener uno o dos padres, y en el primer caso la relación puede ser sexual o asexual. Pero, afortunadamente, no intervienen estas dificultades en lo que pretendo decir. Haré acerca de la relación **P** *una y sólo una* suposición, a saber, que $\mathbf{P}_{po}$ es irreflexiva, o dicho en otras palabras, que ningún bionte es su propio antepasado. Se me concederá, imagino, que semejante suposición es suficientemente inocua y exenta de riesgo, y que todos los biólogos estarán de acuerdo en aceptarla. La llamaré postulado primero de la relación parental. Así pues:

[P.P.1] Para todo x, no $(x\mathbf{P}_{po}x)$.

Con la ayuda de **P** procedo ahora a definir un conjunto de relaciones que es de suma utilidad en la teoría de la evolución. Lo llamo conjunto de líneas-**P**. Diré que una relación R es una línea-**P** si, y sólo si, R es una línea (en el sentido ya definido) y R está incluida en **P**.

Al decir que una relación R está incluida en **P**, entiendo que toda pareja de R es también una pareja de **P**. Ello quiere decir que siempre que tengamos una pareja x, y tal que xRy, entonces tenemos que x es padre de y.

[D.6] $$R \in \text{línea-}\mathbf{P} \equiv (R \in \text{línea} \;\&\; R \subset \mathbf{P}).$$

A título de ejemplo concreto de línea-**P**, consideraremos la sucesión de personas históricas que empieza con Enrique VII, el fundador de la casa real de Tudor, y termina con Jorge I de Hanover, pasando, en el siguiente orden, por Margarita (hija de Enrique VII), Jacobo V de Escocia (hijo de ésta), María Estuardo (hija de éste), Jacobo I de Inglaterra (hijo de ésta), Isabel (hija de éste), Sofía (hija de ésta y madre de Jorge I). Cada uno de estos términos intermedios tiene un padre en el conjunto y es padre de un miembro del conjunto. Esta relación es, por tanto, de uno-a-uno; su primer término está en una cierta potencia de dicha relación respecto del último, y ella está incluida en **P**. Es, en consecuencia, una línea-**P**. Incidentalmente, *junta* (en el sentido definido) al conjunto de los Tudor con el conjunto de los Hanover, puesto que Enrique VII es un Tudor, pero no un Hanover, y Jorge I pertenece a la casa de Hanover pero no a los Tudor.

A continuación siguen algunas consecuencias de la definición de línea-**P** y nuestro único postulado relativo a **P**.

[T.6.01] **P** es asimétrica $(x)(y)$ (si $x\mathbf{P}y$, entonces no $(y\mathbf{P}x)$) (por P.P.1).

[T.6.011] Si R es una línea-**P**, sus términos primero y último no son idénticos.
(R) (Si $R \in$ línea-**P**, entonces $B(R) \neq B(\breve{R})$) (por D.6, P.P.1).

[T.6.02] Si R es una línea-**P**, entonces R_{po} está incluida en $\mathbf{P}_{po}$.
(R) (Si $R \in$ línea-**P**, entonces $R_{po} \subset \mathbf{P}_{po}$) (por D.6).

[T.6.03] Si R y S son líneas-**P** tales que el último término de R es idéntico al primero de S, entonces el primer término de R es idéntico al primero de $R + S$, y el último término de S es idéntico al último de $R + S$.
$(R)(S)$ (Si $R \in$ línea-**P** & $S \in$ línea-**P** & $B(\breve{R}) = B(S)$, entonces $B(R) = B(R + S)$ & $B(\breve{S}) = B(R \dot{+} S)$) (por D.5, D.6).

[T.6.2] Si R y S son líneas-**P** tales que el último término de R es idéntico al primero de S, entonces el último término de S no es idéntico al primero de R.
$(R)(S)$ (Si $R \in$ línea-**P** & $S \in$ línea-**P** & $B(\breve{R}) = B(S)$, entonces $B(\breve{S}) \neq B(R)$) (por D.6, P.P.1).

[T.6.21] Si R y S son líneas-**P** tales que el último término de R es idéntico al primer término de S, entonces $R + S$ es de uno-a-uno.

$(R)(S)$ (Si $R \in$ línea-**P** & $S \in$ línea-**P** & $B(\breve{R}) = B(S)$, entonces $R + S \in 1 \rightarrow 1$) (por D.5, D.6, P.P.1).

[T.6.22] Si R y S son líneas-**P**, entonces $R + S$ está incluida en **P**.

$(R)(S)$ (Si $R \in$ línea-**P** & $S \in$ línea-**P**, entonces $R + S \subset \mathbf{P}$) (por D.5, D.6).

[T.6.23] Si R y S son líneas-**P** tales que el último término de R es idéntico al primero de S, entonces el primer término de $R + S$ está en una cierta potencia de $R + S$ con respecto al último término de $R + S$.

$(R)(S)$ (Si $R \in$ línea-**P** & $S \in$ línea-**P** & $B(\breve{R}) = B(S)$, entonces $B(R + S)(R + S)_{\mathrm{po}} B(R \dot{+} S)$) (por D.6, T.6.03).

De los tres últimos enunciados se sigue que

[T.6.24] Si R y S son líneas-**P** tales que el último término de R es idéntico al primero de S, entonces $R + S$ es una línea-**P**.

$(R)(S)$ (Si $R \in$ línea-**P** & $S \in$ línea-**P** & $B(\breve{R}) = B(S)$, entonces $R + S \in$ línea-**P**).

A modo de ilustración del método de deducción, doy la derivación completa del T.6.01 (las referencias precedidas de *P.M.* corresponden a proposiciones de *Principia Mathematica*, con la numeración que allí ostentan):

Omitiendo los cuantificadores universales, tenemos: *

(1) $x\mathbf{P}y \cdot y\mathbf{P}x \cdot \supset \cdot x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}y \cdot y\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x$ (por *P.M.* 91.502).

(2) $x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}y \cdot y\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x \cdot \supset \cdot x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x$ (por *P.M.* 91.56).

(3) no $(x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x) \supset$ no $(x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}y \cdot y\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x)$ (por *P.M.* 2.16 y (2)).

(4) no $(x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}y \cdot y\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x) \cdot \supset \cdot$ no $(x\mathbf{P}y \cdot y\mathbf{P}x)$ (por *P.M.* 2.16 y (1)).

(5) no $(x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x) \cdot \supset \cdot$ no $(x\mathbf{P}y \cdot y\mathbf{P}x)$ (por *P.M.* 3.33 y (3) y (4)).

(6) no $(x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x) \cdot \supset \cdot$ no $(x\mathbf{P}y)$ o no $(y\mathbf{P}x)$ (por *P.M.* 3.13 y (5)).

(7) no $(x\mathbf{P}_{\mathrm{po}}x) \cdot \supset \cdot x\mathbf{P}y \supset$ no $(y\mathbf{P}x)$ (por *P.M.* 1.01 y (6)).

(8) $x\mathbf{P}y \cdot \supset \cdot$ no $(y\mathbf{P}x)$ (por *P.M.* 9.12 y (7) y P.P.1).

(9) $(x)(y)(x\mathbf{P}y \cdot \supset \cdot$ no $(y\mathbf{P}x))$.

Efectuaremos ahora una nueva adición a nuestro vocabulario biológico, introduciendo la noción de *conjunto taxonómico*. Por un conjunto taxonómico en-

* Para el uso de puntos en los siguientes enunciados, véase mi *Axiomatic Method in Biology*, pp. 20 y 49. Un punto entre dos matrices adyacentes desempeña la función de signo de conjunción, y deberá leerse, por tanto, 'y'. Uno o más puntos inmediatamente antes o después del signo condicional desempeñan la función de paréntesis, y su alcance se extiende hasta el final del enunciado o hasta que se llegue a un número mayor de puntos.

tiendo cualquier conjunto que figure en el sistema taxonómico de animales y plantas. Así una especie, un género, una familia, un orden, etc., serán conjuntos taxonómicos. Una sub-especie, un sub-género, etc., lo serán también. Denoto por '**ts**' al conjunto de todos los conjuntos taxonómicos.

Siendo éste otro signo no definido del sistema, precisa ser introducido por medio de postulados. Inicialmente, adopto los tres postulados siguientes, a los que denomino postulados evolutivos.

[P.E.1] Si X e Y son conjuntos taxonómicos, y una línea-**P** junta X con Y, entonces para todo miembro u de Y hay una línea-**P**, S, tal que el primer término de S pertenece a $X-Y$ y el último término de S es idéntico a u.

$$(X)\ (Y)\ (X \in \mathbf{ts}\ \&\ Y \in \mathbf{ts}\ \&\ (\exists R)\ (R \in \text{línea-}\mathbf{P}\ \&\ J(R, X, Y)) \cdot \cdot \supset (u)\ (u \in Y \supset (\exists S)\ (S \in \text{línea-}\mathbf{P}\ \&\ B(S) \in X - Y\ \&\ B(\breve{S}) = u))).$$

Poco arriesgado parece aceptar esta suposición y poco probable que ello suscite excesiva controversia. Sin embargo, no podemos juzgar hasta después de haber examinado sus consecuencias. El siguiente es un poco más complicado.

[P.E.2] Si X, Y y Z son conjuntos taxonómicos tales que una línea-**P** junta X con Y, y una línea-**P** junta Y con Z, entonces *toda* línea-**P** que junta $X-Y$ con $Z-Y$ es la suma de una línea-**P** que junta X con Y y una línea-**P** que junta Y con Z.

$$(X)\ (Y)\ (Z)\ (X \in \mathbf{ts} \cdot Y \in \mathbf{ts} \cdot Z \in \mathbf{ts} \cdot (\exists R)\ (\exists S)\ (R \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot S \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot \cdot J(R, X, Y) \cdot J(S, Y, Z)) \cdot \supset \cdot (Q)\ (Q \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot J(Q, X - Y, Z - Y) \cdot \cdot \supset \cdot (\exists \mathrm{P})\ (\exists T)\ (\mathrm{P} \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot T \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot J(P, X, Y) \cdot J(T, Y, Z) \cdot \cdot Q = \mathrm{P} + T))).$$

El efecto de este postulado es el siguiente: cuando hemos juntado a $X-Y$ con Y mediante una línea-**P**, y juntado a $Y-Z$ con Z mediante una línea-**P**, el presente postulado excluye la posibilidad de desviar las líneas-**P** de suerte que lleguen a Z viniendo de $X-Z$, sin tener alguno de los miembros de sus respectivos campos en Y. Excluye la posibilidad de omitir Y cuando se pase mediante líneas-**P** de $X-Z$ a Z. Este postulado es, tal vez, más discutible que los otros, pero sólo podemos juzgar de él por lo que nos proporcione.

El tercer postulado evolutivo es muy simple:

[P.E.3] Si X, Y y Z son conjuntos taxonómicos tales que una línea-**P** junta X con Y, y una línea-**P** junta Y con Z, entonces X y Z no tienen miembros en común.

$$(X)\ (Y)\ (Z)\ (X \in \mathbf{ts} \cdot Y \in \mathbf{ts} \cdot Z \in \mathbf{ts} \cdot (\exists R)\ (\exists S)\ (R \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot S \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot \cdot J(R, X, Y) \cdot J(S, Y, Z)) \supset X \cap Z = \Lambda).$$

Para llevar a cabo la tarea de extraer las consecuencias de estos postulados,

al objeto de saber cuáles son sus frutos, será conveniente introducir, por vía de definición, algunas nuevas expresiones. Ello quiere decir, simplemente, que utilizamos estas nuevas expresiones a título de abreviaturas de combinaciones de expresiones que se repiten con frecuencia y que están construidas con la exclusiva ayuda de los signos primitivos o no definidos. Nada nuevo, por tanto, introducen en el sistema. Al mismo tiempo, y para facilitar la lectura, hago a estos signos acompañarse de una expresión verbal. Pero es importante no ser inducido a error por esta última. Nada, por así decirlo, precisa ser leído en ella, que no esté en la definición. Así, por ejemplo, la primera definición es como sigue:

[D.7] Diré que un conjunto taxonómico X está en relación evolutiva con un conjunto taxonómico Y si, y sólo si, hay una línea-**P** que junta X con Y Denoto a esta relación por '**E**', y escribo $\mathbf{E}(X, Y)$.

$$\mathbf{E}(X, Y) \equiv (\exists R)\ (R \in \text{línea-}\mathbf{P}\ \&\ X \in \mathbf{ts}\ \&\ Y \in \mathbf{ts}\ \&\ J(R, X, Y)).$$

Podrá haber quien diga ahora: "eso no es lo que yo entiendo por relación evolutiva". Pero no sería esta la cuestión. Yo no estoy diciendo qué sea lo que todo el mundo entiende por relación evolutiva. Lo único que hago es notificar que utilizaré '$\mathbf{E}(X, Y)$' como una abreviatura para 'alguna línea-**P** junta el conjunto taxonómico X con el conjunto taxonómico Y' (esto es, al menos una línea-**P** lo hace), y que leeré además, a veces, dicha expresión como 'X está en relación evolutiva con Y'. Pero esta última frase no pertenece en absoluto al sistema.

Análogas observaciones han de aplicarse a las definiciones que siguen. Pero antes de introducir más definiciones, deberemos considerar algunas de las consecuencias de D.7 y nuestros tres postulados evolutivos.

[T.7.11] Si X está incluido en Y o Y en X, entonces no es cierto que $\mathbf{E}(X, Y)$ o $\mathbf{E}(Y, X)$.

$$(X)(Y)((X \subset Y \text{ o } Y \subset X) \supset (\text{no}(\mathbf{E}(X, Y)) \ \&\ \text{no}(\mathbf{E}(Y, X))))$$

(por D.7, T.1).

[T.7.12] Para ningún X puede suceder que $\mathbf{E}(X, X)$.

(X) (no $(\mathbf{E}(X, X))$) (por T.7.11).

[T.7.121] Si $\mathbf{E}(X, Y)$, entonces X no es cerrado con respecto a la conversa de **P**.

$(X)(Y)$ (Si $\mathbf{E}(X, Y)$, entonces no ($\breve{\mathbf{P}}$" $X \subset X$))

(por D.7, T.3, D.4, D.6).

[T.7.2] Si $\mathbf{E}(X, Y)$, hay una línea-**P** que junta X con todo sub-conjunto de $Y-X$ que no sea vacío.

$$(X)(Y)(Z)\ ((\mathbf{E}(X, Y)\ \&\ Z \neq \Lambda\ \&\ Z \subset Y-X) \supset (\exists R)$$
$$(R \in \text{línea-}\mathbf{P}\ \&\ J(R, X, Z))) \qquad \text{(por D.7, P.E.1).}$$

[T.7.21] Si $\mathbf{E}(X, Y)$, entonces X está en una relación evolutiva con todo conjunto taxonómico que esté incluido en $Y-X$.

$(X)(Y)(Z)((\mathbf{E}(X, Y) \ \& \ Z \in \mathbf{ts} \ \& \ Z \neq \Lambda \ \& \ Z \subset Y-X) \supset \mathbf{E}(X, Z))$

(por D.7, T.7.2).

[T.7.22] Si $\mathbf{E}(X, Y)$ y $\mathbf{E}(Y, Z)$, entonces X y Z no tienen miembros en común.

$(X)(Y)(Z)((\mathbf{E}(X, Y) \ \& \ \mathbf{E}(Y, Z)) \supset X \cap Z = \Lambda)$ (por D.7, P.E.3).

[T.7.23] La relación **E** es transitiva.

$(X)(Y)(Z)((\mathbf{E}(X, Y) \ \& \ \mathbf{E}(Y, Z)) \supset \mathbf{E}(X, Z))$

(por D.7, D.2, E.P.1, T.6.24, T.7.22, T.6.03, D.6).

[T.7.24] La relación **E** es asimétrica.

$(X)(Y)$ (Si $\mathbf{E}(X, Y)$, entonces no $\mathbf{E}(Y, X)$) (por T.7.12, T.7.23).

[T.7.3] Si $\mathbf{E}(X, Y)$ y $\mathbf{E}(Y, Z)$, entonces, perteneciendo al campo de toda línea-**P** que junta a X con Y, hay miembros de Y que no pertenecen a X o a Z.

$(X)(Y)(Z)(\mathbf{E}(X, Y) \ \& \ \mathbf{E}(Y, Z) \supset (R)((R \in \text{línea-}\mathbf{P} \ \& \ J(R, X, Z)) \supset$

$\supset C(R) \cap Y - (X \cup Z) \neq \Lambda))$.

Ello se sigue de D.7, D.5, D.2 y E.P.2.

[T.7.31] Si $\mathbf{E}(X, Y)$ y $\mathbf{E}(Y, Z)$, entonces ninguna línea-**P** junta directamente a X con Z.

$(X)(Y)(Z)(\mathbf{E}(X, Y) \ \& \ \mathbf{E}(Y, Z) \supset \text{no}\,(\exists Q)(Q \in \text{línea-}\mathbf{P} \ \& \ Jd(Q, X, Z)))$.

Ello se sigue de D.7, D.3 y T.7.3.

Diré que la evolución es no-oscilatoria entre X e Y si, y solamente si, X está en una relación evolutiva con Y, y si R es *cualquier* línea-**P** que junta a X con Y, entonces X es cerrado con respecto a R, e Y es cerrado con respecto a la conversa de R. Lo cual se escribe $\mathbf{NO}(X, Y)$.

[D.8] $\mathbf{NO}(X, Y) \equiv (\mathbf{E}(X, Y) \ \& \ ((R)(R \in \text{línea-}\mathbf{P} \ \& \ J(R, X, Y)) \supset$

$\supset (R``X \subset X \ \& \ \breve{R}``Y \subset Y)))$.

[T.8.11] Si la evolución es no-oscilatoria entre X e Y, y R es cualquier línea-**P** que junta a X con Y, entonces hay un y solamente un paso-R fuera de X y un y solamente un paso-R hacia Y, y no hay ningún paso-R hacia X y ningún paso-R fuera de Y.

$(X)(Y)(R)((\mathbf{NO}(X, Y) \ \& \ R \in \text{línea-}\mathbf{P}) \supset (Nc(S(R, X, \overline{X})) =$

$= Nc(S(R, \overline{Y}, Y)) = 1 \ \& \ S(R, \overline{X}, X) = S(R, Y, \overline{Y}) = \Lambda))$.

Ello se sigue de D.8, T.4, T.4.01 y T.4.02. Que **NO** es irreflexiva y asimétrica se sigue de D.8, T.7.12 y T.7.24. Pero con nuestros tres postulados evolutivos no se sigue que **NO** sea transitiva.

(Si deseamos tener en nuestro sistema la transitividad de **NO** será necesario añadir lo siguiente a nuestros postulados evolutivos.

Si X, Y y Z son tres conjuntos taxonómicos cualesquiera tales que una línea-**P** junte a X con Y, y una línea-**P** junte a Y con Z, entonces ninguna línea-**P** que junte a X con $Y-Z$ tiene miembro alguno en su campo que pertenezca a Z, y ninguna línea-**P** que junte a $Y-X$ con Z tiene miembro alguno en su campo que pertenezca a X).

Diré que la evolución es *directa* de X a Y si, y solamente si, X está en una relación evolutiva con Y y toda línea-**P** que junte a X con Y junta directamente a X con Y. Lo cual se escribe: **Ed** (X, Y).

[D.9] $\mathbf{Ed}(X, Y) \equiv (\mathbf{E}(X, Y) \;\&\; (R)((R \in \text{línea-}\mathbf{P} \;\&\; J(R, X, Y)) \supset Jd(R, X, Y)))$.

[T.9.1] Si $\mathbf{E}(X, Y)$ y $\mathbf{E}(Y, Z)$, entonces no $(\mathbf{Ed}(X, Z))$.

Ello se sigue de D.9 y T.7.31.

Del último enunciado y de D.9 se seguirá que **Ed** es intransitiva. Que es irreflexiva y asimétrica se sigue de D.9 y los correspondientes enunciados concernientes a **E**.

Defino ahora la evolución gradual. Digo que la evolución es directa y gradual de X a Y si, y solamente si, es directa y si, para toda línea-**P** R que junte a X con Y, no hay paso-R alguno de $X-Y$ a $Y-X$. Lo cual se escribe **Gd** (X, Y).

[D.10] $\mathbf{Gd}(X, Y) \equiv (\mathbf{Ed}(X, Y) \;\&\; (R)((R \in \text{línea-}\mathbf{P} \;\&\; J(R, X, Y)) \supset \supset S(R, X-Y, Y-X) = \Lambda))$.

Finalmente, diré que la evolución es no-gradual de X a Y si, y solamente si, X está en una relación evolutiva directa con Y, y para toda línea-**P** R que junte a X con Y, todo paso-R de X a Y es un paso de $X-Y$ a $Y-X$. Lo cual se escribe **NG** (X, Y).

[D.11] $\mathbf{NG}(X, Y) \equiv (\mathbf{Ed}(X, Y) \;\&\; (R)((R \in \text{línea-}\mathbf{P} \;\&\; J(R, X, Y)) \supset \supset (S(R, X, Y) \subset S(R, X-Y, Y-X))))$.

Se seguirá que las dos relaciones anteriores son irreflexivas, asimétricas e intransitivas. Cada una de ellas excluye a la otra aunque ninguna es el complemento de la otra; por tanto, no excluyen otras posibilidades.

De D.10, D.9 y T.3.22 se seguirá que, si la evolución de X a Y es directa y gradual en el sentido antes mencionado, entonces X e Y han de tener miembros en común. Pero si tenemos **NG** (X, Y), no se sigue que X e Y no tengan miembros en común. Se seguirá, empero, que si X está en una relación evolutiva directa con Y, y X e Y no tienen miembro alguno en común, entonces la evolución de X a Y es no-gradual.

Y baste con ello, por el momento, en lo que respecta a la gradualidad, al

menos en un sentido de la palabra. Vuelvo ahora al problema de saber qué es lo que lleva consigo el suponer que tengan miembros en común dos conjuntos taxonómicos, ninguno de los cuales está incluido en el otro (lo que es requisito indispensable si ha de existir entre ellos una relación evolutiva). A este propósito efectúo una nueva adición a nuestro primitivo vocabulario biológico. Uso '**tu**' para denotar el conjunto de todas las *unidades taxonómicas*, y por una unidad taxonómica entiendo simplemente cualquier conjunto que esté especificado por referencia a un solo carácter taxonómico distintivo. Así por ejemplo, el conjunto de todos los animales que poseen un hueso parasfenoide constituiría una unidad taxonómica, al igual que el conjunto de todos los animales que poseen un riñón metanéfrico, el conjunto de todas las plantas que posean dos cotiledones, etc.

Ahora bien, es costumbre definir cada conjunto taxonómico por referencia a un cierto número de tales unidades taxonómicas, considerándolo como el *producto* booleano de ellas. Los anfibios, por ejemplo, son usualmente definidos como el producto booleano de unas ocho o nueve de esas unidades taxonómicas. Por otra parte, estos conjuntos taxonómicos son definidos de tal modo que dos de ellos son siempre mutuamente exclusivos, a menos que uno esté contenido en el otro; consiguientemente resultará imposible que la evolución de uno a otro sea directa y gradual, puesto que ello requeriría que ambos tuviesen miembros en común. Esta dificultad, sin embargo, queda fácilmente superada si definimos cada conjunto taxonómico, no como el producto booleano, sino como la *suma* booleana de las unidades taxonómicas. Bien es verdad que semejante requisito, sin más aditamento, daría excesiva amplitud a nuestros conjuntos taxonómicos. A fin de obviar tal extremo puede imponerse, además, otra condición. En qué haya de consistir esta última resultará patente si se observa que todo conjunto taxonómico es cerrado con respecto a la conversa de la relación parental. Porque el conjunto de todos los biontes es cerrado en este sentido y todo conjunto taxonómico está incluido en él.* Por otra parte, puesto que sólo hay un número finito de conjuntos taxonómicos, tendrá que haber un conjunto taxonómico *mínimo* en el que esté incluido todo conjunto taxonómico dado y que sea cerrado con respecto a la conversa de la relación parental.

En consecuencia, establezco como primer postulado taxonómico:

[P.T.1] Para todo conjunto taxonómico X, existe un mínimo conjunto taxonómico Y que es cerrado con respecto a la conversa de la relación parental y en el cual X está incluido.

---

* Por ejemplo, el conjunto de los peces no es cerrado con respecto a la conversa de **P**, puesto que se cree que hay líneas-**P** que juntan los peces con los anfibios; pero el conjunto de los cordados es cerrado con respecto a la conversa de **P**. Ello envuelve la suposición de que en el futuro los cordados producirán sólo cordados, y esta hipótesis se basa en la doctrina de que una desviación muy pronunciada de lo típico, en fase *temprana* del desarrollo, tiene consecuencias letales. Por esa razón puede ser preferible formular el enunciado en el texto en forma tal que se lo confine a los miembros *adultos* de los conjuntos taxonómicos concernientes.

Teniendo esto presente, podemos formular un segundo postulado taxonómico:

[P.T.2] Si X es un conjunto taxonómico e Y es el mínimo conjunto taxonómico que satisface P.T.1 y en el cual X está incluido, entonces existen $n(n>1)$ unidades taxonómicas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, tales que X es idéntico a la suma booleana de todos los miembros de estas n unidades que pertenecen a Y, es decir, $X = \sum_{1}^{n} Y \cap X_i$ (para cada $i = 1, 2, \ldots, n$).

Si convenimos en proceder de este modo, podemos distinguir de inmediato dos importantes subconjuntos que forman parte de cualquier conjunto taxonómico dado X. Los llamo el *núcleo* de X (escrito $\mathbf{C}(X)$) y la *orla* de X (escrito $\mathbf{F}(X)$).

Por el núcleo de X entiendo lo que ordinariamente se identifica con el propio conjunto X, o sea, el producto booleano de todas las unidades taxonómicas envueltas en la definición de X. De esta forma, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son las unidades taxonómicas que definen a X, podemos decir:

[D.12] $$\mathbf{C}(X) = \prod_{1}^{n} X_i.$$

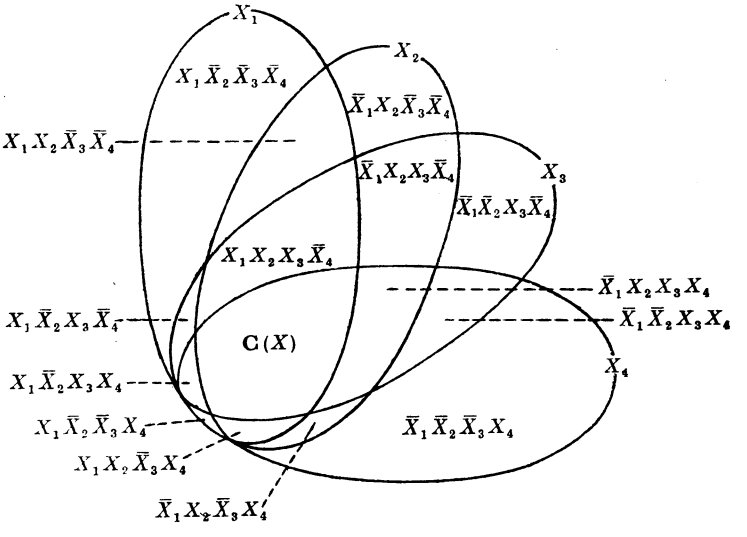
Por la orla de X entiendo aquellos miembros de X que *no* pertenecen al núcleo de X. Así:

[D.13] $$\mathbf{F}(X) = X - \mathbf{C}(X).$$

Diagrama de conjunto de puntos de núcleo y orla

$n=4 \quad X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$

$\mathbf{C}(X) = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4$



(La yuxtaposición de las designaciones de conjunto indica el producto booleano)

Esta distinción entre el núcleo y la orla de un conjunto taxonómico no sólo nos capacita para entender el problema del solapamiento de los conjuntos taxonómicos, sino que también, pienso, ilumina la distinción que el sistematizador introduce entre "buenas" y "malas" especies. Si un sistematizador vive durante un periodo de tiempo que interseca únicamente el núcleo de una especie, la llamará una buena especie, pero si este periodo de tiempo interseca la orla en una amplia medida, la llamará una especie mala. El núcleo corresponde a tiempos de estabilidad, y la orla a tiempos de inestabilidad de un conjunto taxonómico aunque, por supuesto, no hay nada que prohiba que los miembros del núcleo y de la orla sean contemporáneos entre sí.

En relación con esto, señalaré de paso el hecho más bien curioso de que en lo que hasta ahora se ha dicho, no ha sido necesario hacer la menor referencia explícita a la precedencia en el tiempo. Ello es debido a que hemos tomado a **P** como una noción primitiva, y a la irreflexividad de $\mathbf{P}_{po}$ como un postulado. Hubiera sido posible adoptar la precedencia en el tiempo como una noción primitiva y con su ayuda, juntamente con algunos otros funtores biológicos, haber introducido a **P** por definición. La parte jugada por la precedencia en el tiempo en nuestro sistema, hubiera sido entonces explícita.

Es necesario ahora introducir un cuarto postulado evolutivo. En la formulación de este postulado omito, por razones de simplicidad, toda referencia a los conjuntos taxonómicos más pequeños que son cerrados con respecto a la conversa de **P** y que están mencionados en P.T.1 y P.T.2. Hay que tener en cuenta que los X_i y los Y_i allí mencionados, son los miembros de unidades taxonómicas que pertenecen a esos conjuntos taxonómicos más pequeños:

[P.E.4] Si un conjunto taxonómico X está en una relación evolutiva directa con un conjunto taxonómico Y (es decir, si **Ed** (X, Y)), entonces hay un conjunto de n X_i y un conjunto de n Y_i (con $n > 1$ e $i = 1, 2, \ldots, n$) tales que X es idéntico a la suma booleana de los X_i e Y es idéntico a la suma booleana de los Y_i; y los X_i y los Y_i pueden ser puestos uno con otro en correspondencia de uno-a-uno, de manera tal que los miembros de cada pareja de unidades taxonómicas bajo esta correspondencia son mutuamente exclusivos. Supondremos que las correspondientes parejas comparten el mismo suscrito, así pues tendremos

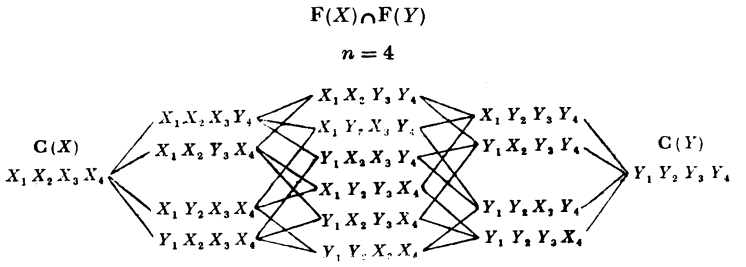
$$X_1 \cap Y_1 = \Lambda, \quad X_2 \cap Y_2 = \Lambda,$$

y así sucesivamente.

Hablando sin rigor, podemos decir que la evolución está aquí concebida como un proceso de reemplazo de cada X_i por un Y_i con el cual no tenga ningún miembro en común. Por ejemplo, al recorrer una línea-**P** que va del núcleo de los anfibios al núcleo de los reptiles, comenzamos con términos que tienen un

riñón mesonéfrico pero no tienen un riñón metanéfrico en el adulto y acabamos con términos que tienen un riñón metanéfrico en el adulto pero no tienen un riñón mesonéfrico.

Zona de transición entre X e Y



Si se excluyen las oscilaciones, el número de trayectorias desde C(*X*) hasta C(*Y*) en el caso general por reemplazos singulares sucesivos es igual a $n!$. El número de sub-conjuntos de la zona de transición, que tengan exactamente r X_i (o exactamente r Y_i) es igual a $\binom{n}{r}$.

De D.12 y D.13 se seguirá que, para cualquier conjunto taxonómico *X*,

[T.13.11] $$\mathbf{C}(X) \cap \mathbf{F}(X) = \Lambda.$$

[T.13.12] $$\mathbf{C}(X) \cup \mathbf{F}(X) = X.$$

De estas definiciones y P.E.4 se seguirá que, para cualesquiera conjuntos taxonómicos *X* e *Y*,

[T.13.21] Si **Ed**(*X*, *Y*), entonces $\mathbf{C}(X) \cap \mathbf{C}(Y) = \Lambda$.

[T.13.22] Si **Ed**(*X*, *Y*), entonces $\mathbf{C}(X) \cap \mathbf{F}(Y) = \Lambda$.

Llamemos a la parte común de la orla de un conjunto taxonómico *X* y a la orla de un conjunto taxonómico *Y*, la *zona de transición* entre *X* e *Y*, denotándola por **T**(*X*, *Y*), así:

[D.14] $$\mathbf{T}(X, Y) = \mathbf{F}(X) \cap \mathbf{F}(Y).$$

Entonces tendremos, para cualesquiera conjuntos taxonómicos *X*, *Y* y *Z*,

[T.14.1] $$\mathbf{T}(X, Y) = \mathbf{T}(Y, X).$$

[T.14.11] Si **Ed**(*X*, *Y*), entonces $\mathbf{T}(X, Y) = X \cap Y$.

[T.14.12] Si **Ed**(*X*, *Y*) y $\mathbf{T}(X, Y) = \Lambda$, entonces **NG**(*X*, *Y*).

[T.14.13] Si **E**(*X*, *Y*) y **E**(*Y*, *Z*), entonces $\mathbf{T}(X, Z) = \Lambda$ (por P.E.3 y D.7).

[T.14.14] Si **Gd**(*X*, *Y*), entonces $\mathbf{T}(X, Y) \neq \Lambda$.

Podemos ahora compendiar la posición alcanzada con respecto al problema mencionado al principio. Si la evolución de X a Y es gradual y directa en el sentido definido, entonces X e Y han de tener miembros en común, y esta parte común constará de aquellos miembros de la orla de X que pertenecen también a la orla de Y. Podemos también formular ahora los factores de los que depende el *grado* de gradualidad. Pero explicaré primero qué entiendo por un *reemplazo*. Diré que una pareja x, y es un reemplazo relativamente a X e Y si, y solamente si, $x\mathbf{P}y$ y si y pertenece a un sub-conjunto de la zona de transición entre X e Y, que tiene al menos *un* Y_i *más* que aquél al que pertenece x, o y pertenece al núcleo de Y y x a la zona de transición. Por ejemplo, cualquier miembro del conjunto de parejas $S(\mathbf{P}, X_1X_2X_3Y_4, X_1X_2Y_3Y_4)$ será un reemplazo.

Ahora podemos ver que el grado de gradualidad de evolución entre X e Y dependerá de

(1) qué cantidad de reemplazos serán necesarios para pasar del núcleo de X al núcleo de Y (esto es, de los n en P.E.4);

(2) la frecuencia con la que ocurren los reemplazos en cada línea-**P** que junte a X con Y;

(3) si los miembros de una pareja de reemplazo pueden diferir con respecto a más de una unidad taxonómica, por ejemplo, si ocurren reemplazos tales como $S(\mathbf{P}, X_1X_2X_3Y_4, X_1Y_2Y_3Y_4)$ (suponiendo $n = 4$);

(4) si la evolución de X a Y es o no es oscilatoria.*

Ahora que hemos distinguido entre núcleo y orla, se verá que podemos definir un tipo más estricto de evolución no-oscilatoria que el que fue definido primeramente. Hemos dicho que la evolución es no-oscilatoria de X a Y, si X es cerrado con respecto a toda línea-**P** que junte a X con Y y si Y es cerrado con respecto a la conversa de toda línea-**P** que sea tal. Un requisito mucho más drástico sería que toda *unidad* taxonómica en la zona de transición entre X e Y debiera ser cerrada de modo correspondiente, de suerte que para cada X_i e Y_i, una vez hayamos abandonado a X_i, no haya retorno, y, una vez que hayamos entrado en Y_i, no haya escape mediante línea-**P** alguna que junte a X_i con Y_i.

Igualmente podrá verse que, aunque el pasaje de un conjunto taxonómico a otro ha de tener lugar en un solo paso-**P**, el pasaje de $\mathbf{C}(X)$ a $\mathbf{C}(Y)$ puede requerir, no obstante, 10.000 generaciones como estimó Darwin, debido a la infrecuencia de reemplazos en las líneas-**P** que juntan tales conjuntos.† Pienso que esto está de acuerdo con la moderna creencia acerca de la rareza de las mutaciones. Parece obvio que la ocurrencia de oscilaciones habría de retardar sobremanera el proceso.

Hasta el presente hemos venido trabajando con un vocabulario biológico bastante exiguo. Puede pensarse que se trata de un vocabulario con el que difícilmente cabría esperar expresar nada que sea importante acerca de la evolución. Hay muchas cosas que decir sobre la evolución que no pueden ser expresadas

---

* Las consideraciones aritméticas de las pp. 159-65 son relevantes aquí.

† No porque, como Darwin parece haber supuesto, ello requiera un gran número de pasos *imperceptibles*.

con estos limitados medios. Pero deliberadamente he venido siguiendo lo que creo ser un importante principio de método, a saber, introducir una a una nuestras nociones no-definidas con el fin de ver cuánto puede hacerse con ellas antes de introducir otra nueva. Observaciones similares son aplicables también a los postulados. Además, quisiera señalar que, aunque lo que he dicho puede que no parezca muy excitante y que he dejado sin tocar muchos problemas relativos a la evolución, no obstante he conseguido dar una formulación tolerablemente precisa para algunos postulados fundamentales que son básicos en cualquier teoría de la evolución, y respecto a los cuales las teorías actuales han de tomar *cierta* actitud, aun cuando esa actitud pueda no ser manifiesta de modo explícito. Lo que he intentado hacer es sacar a la luz algunos de estos problemas al formularlos explícitamente.

Mas, pese a la parvedad de nuestro actual vocabulario, aún no hemos arribado, en modo alguno, al final de cuanto es posible hacer con él.

En los libros de biología encontramos, a veces, diagramas de lo que se denomina *árboles filogenéticos*. Estos diagramas consisten en sistemas de líneas ramificadas y usualmente comienzan al pie o a la cabeza de la página, con una línea cuyas ramas se separan para no volver a juntarse. ¿Qué representan estas líneas? ¿Qué sucede en la ramificación?

Veamos si es posible formular las respuestas a tales cuestiones con ayuda de la relación parental.

Pedigres y barreras de pedigres

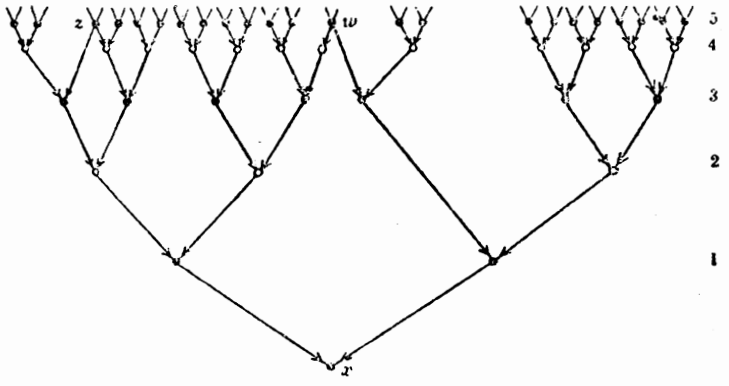


Diagrama de parte del pedigre de x, ilustrativo de barreras. Las líneas horizontales de términos señaladas con 1, 3 y 5 a la derecha del diagrama son barreras del pedigre; pero no así las señaladas con 2 y 4, puesto que hay una línea-**P** que empieza con w y termina en x y no tiene término en 2, una línea-**P** que empieza con z y termina en x y no tiene término en 4, y una línea-**P** que empieza con w y termina en x y no tiene término en 4.

En primer lugar deberé explicar lo que entiendo por el *pedigre* de un miembro de un conjunto taxonómico, y por una *barrera* de un tal pedigre. Diré que un conjunto X es el pedigre de un miembro y de un determinado conjunto taxonómico si, y sólo si, X consta de y juntamente con todos los antepasados de y.

[D.15] $X = \mathbf{Ped}\,(y) \equiv (\exists Y)\,(Y \in \mathbf{ts}\ \&\ y \in Y\ \&\ (x)\,(x \in X \equiv x\mathbf{P}_* y))$.

Diré que un conjunto Z es una barrera de un pedigre X si, y solamente si, son satisfechas las siguientes condiciones:

(1) hay un y tal que $X = \mathbf{Ped}\,(y)$;
(2) Z no es nulo y está incluido en X;
(3) hay antepasados de miembros de Z que no pertenecen a Z;
(4) hay descendientes de miembros de Z que pertenecen a X pero no a Z;
(5) si R es cualquier línea-**P** cuyo primer término pertenece a los antepasados de miembros de Z pero no a Z y cuyo último término es y, entonces el campo de R contiene al menos un miembro de Z.

Arboles filogenéticos

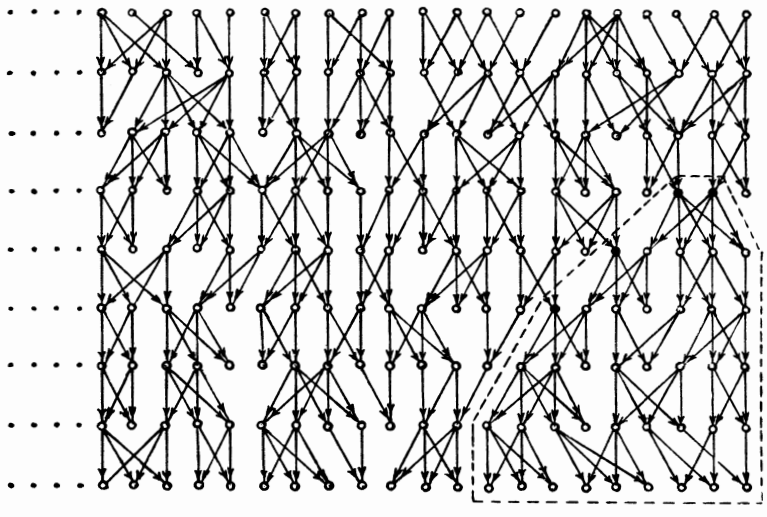


Diagrama para ilustrar el conjunto inicial (Y) de un árbol filogenético X. Los miembros de X están encerrados por la línea punteada. Los miembros de Y están representados por los puntos negros. La dirección del tiempo va de arriba abajo en esta figura.

[D.16] $Z \in \mathbf{Bar}\,(X) \equiv (\exists y)\,(X = \mathbf{Ped}\,(y) \cdot Z \neq \Lambda \cdot Z \subset X \cdot$
$\cdot\, (\mathbf{P}_{\mathrm{po}}\text{“}Z) - Z \neq \Lambda \cdot (\breve{\mathbf{P}}_{\mathrm{po}}\text{“}Z) \cap X \cap \overline{Z} \neq \Lambda \cdot (R)\,((R \in \text{línea-}\mathbf{P} \cdot$
$\cdot\, B\,(R) \in (\mathbf{P}_{\mathrm{po}}\text{“}Z) - Z \cdot B\,(\breve{R}) = y) \supset C\,(R) \cap Z \neq \Lambda))$.*

Hablando en términos generales, una barrera de un pedigre es un subconjunto Z del pedigre tal que no es posible pasar a lo largo de una línea-**P** de un extremo a otro sin pasar por un miembro de Z.

Con ayuda de la noción de barrera de un pedigre, podemos ahora definir *árbol filogenético*. Diré que un conjunto X es un árbol filogenético con conjunto inicial Y si, y solamente si, se satisfacen las siguientes condiciones:

---

* En D.16 se utilizan puntos en lugar de '&'.

(1) X consta de Y junto con todos los descendientes de miembros de Y;
(2) ningún padre de un miembro de Y pertenece a X;
(3) si y es cualquier miembro de Y, entonces hay un x y un z tales que $x\mathbf{P}y$ y $x\mathbf{P}z$, y z no pertenece a X;
(4) hay al menos un miembro x de $X - Y$ tal que Y es una barrera del pedigre de x;
(5) si x es cualquier miembro de $X - Y$, entonces hay un sub-conjunto Z de Y que es una barrera del pedigre de x.

[D.17] $$\mathbf{Ph}(X, Y) \equiv (X = \breve{\mathbf{P}}_{*}\text{“}\, Y \cdot (\mathbf{P}\text{“}\, Y) \cap X = \Lambda \cdot$$
$$\cdot (y)((y \in Y) \supset (\exists x)(\exists z)(x\mathbf{P}y \cdot x\mathbf{P}z \cdot z \in \overline{X})) \cdot (\exists x)(x \in X - Y \cdot$$
$$\cdot Y \in \mathbf{Bar}(\mathbf{Ped}(x))) \cdot (x)((x \in X - Y) \supset (\exists Z)(Z \subset Y \cdot$$
$$\cdot Z \in \mathbf{Bar}(\mathbf{Ped}(x))))).*$$

De esta definición se sigue que, si X es un árbol filogenético con conjunto inicial Y, y Z es un árbol filogenético con conjunto inicial Y, entonces X es idéntico a Z. Ello es inmediatamente evidente a partir de la definición. Pero también se sigue que si X es un árbol filogenético con conjunto inicial Y, y X es un árbol filogenético con conjunto inicial Z, entonces Y es idéntico a Z. Como consecuencia de esto se sigue que la relación entre X e Y, cuando X es un árbol filogenético con conjunto inicial Y, es una relación de uno-a-uno. Podemos, por tanto, hablar de *el* conjunto inicial de X:

[D.18] $$Y = \mathbf{Bg}(X) \equiv \mathbf{Ph}(X, Y).$$

Ahora es fácil definir la ramificación. Diré que un árbol filogenético Z se *ramifica en* un árbol filogenético W si, y solamente si, el conjunto inicial de W está incluido en Z menos el conjunto inicial de Z:

[D.19] $$\mathbf{Br}(Z, W) \equiv \mathbf{Bg}(W) \subset Z - \mathbf{Bg}(Z).^{\dagger}$$

A continuación presentamos algunas consecuencias de las definiciones precedentes, con la inclusión de algunas que ya han sido mencionadas:

[T.16.1] Si X es una barrera del pedigre de x y R es cualquier línea-**P** cuyo primer término pertenece al conjunto Y, que consta de aquellos antepasados de miembros de X que no pertenecen a X y cuyo último término es x, y si Z es el conjunto de todos los descendientes de miembros de X que no pertenecen a X, entonces $J(R, Y, Z)$ pero no $Jd(R, Y, Z)$.

[T.17.1] Si $\mathbf{Ph}(X, Y)$ y $\mathbf{Ph}(Z, Y)$, entonces $X = Z$.

---

* En D.17 se utilizan puntos en lugar de '&'.

† D.17 y D.19 son perfeccionamientos de las correspondientes definiciones (que son defectuosas), 2.7.1 y 2.7.4, dadas en mi *Axiomatic Method in Biology*. Afortunadamente las últimas definiciones eran meramente sugerencias y no fueron utilizadas en ulteriores secciones de ese libro.

[T.17.2] Si **Ph** (X, Y) y **Ph** (X, Z), entonces $Y = Z$.*

[T.17.3] Si **Ph** (X, Y), entonces, si x e y son miembros cualesquiera de Y, x está en $\mathbf{P}_{po} | \breve{\mathbf{P}}_{po}$ con y.

[T.17.4] Si **Ph** (X, Y) y Z es cualquier conjunto taxonómico que es cerrado con respecto a la conversa de **P**, e Y está incluido en él, entonces X está incluido en él.

[T.19.1] La relación de ramificación entre árboles filogenéticos es irreflexiva, asimétrica y transitiva.

Aquí cesa por ahora nuestro análisis evolutivo. El paso siguiente consistirá en introducir postulados que conecten árboles filogenéticos con conjuntos taxonómicos, especialmente los postulados concernientes al modo en que los núcleos de conjuntos taxonómicos y sus orlas están relacionados con la ramificación. Se trata de un problema difícil que requiere bastante conocimiento técnico. Una vez haya sido realizado y hayamos agotado las posibilidades de los tres signos no definidos **P**, **ts** y **tu**, será necesario entonces añadir al sistema ulteriores signos no definidos –los que pertenecen a la genética, la embriología y la ecología. En la Parte II† han sido dadas ciertas indicaciones sobre el modo de llevar a cabo esta tarea.

El método que he venido siguiendo recibe el nombre de método de postulados o método axiomático. Después de lo que se ha dicho en la Parte I, apenas si será preciso advertir que los postulados no deben ser considerados como dogmas, sino como formulaciones tentativas que habrán de ser rechazadas si sus consecuencias no están de acuerdo con la experiencia. Espero que cuanto llevo expuesto haya sido suficiente para ilustrar la aplicabilidad y utilidad de este procedimiento en relación con los problemas de la biología, y para mostrar que es posible, según las palabras de Leibniz, 'pedir demostraciones' en tales contextos biológicos. ‡

Nota: Las siguientes líneas dan la derivación de T.17.2:

Si **Ph** (X, Y) y **Ph** (X, Z), entonces $Y = Z$.

Ello depende únicamente de las tres siguientes consecuencias inmediatas de D.17:

---

* Para la derivación de este teorema, véase la última nota de este Apéndice.

† Los siguientes problemas no son discutidos en el texto, pero pueden interesar al lector: digamos que un conjunto taxonómico Z es de *origen convergente*, o pertenece al conjunto **CO** si, y sólo si, existen conjuntos taxonómicos X e Y tales que $\mathbf{E}(X, Z)$ y $\mathbf{E}(Y, Z)$ pero no $\mathbf{E}(X, Y)$, no $\mathbf{E}(Y, X)$, no $X \subset Y$ y no $Y \subset X$. Problema 1: ¿Puede uno u otro de los dos enunciados siguientes ser derivado de los postulados y definiciones del presente sistema: (i) $\mathbf{CO} \neq \Lambda$, (ii) $\mathbf{CO} = \Lambda$? Problema 2: ¿Cuál de estos dos enunciados va a ser preferido a la luz de los datos evolutivos existentes? Problema 3: ¿Qué adiciones, u otras alteraciones, han de ser realizadas en nuestros postulados existentes con vistas a que el enunciado preferido sea derivable? El problema 1 requiere sólo técnica en el arte de derivar consecuencias a partir de los enunciados. El problema 2 requiere un conocimiento técnico de los datos evolutivos, es decir, de registros de observación mediante los cuales puedan ser verificadas las hipótesis evolutivas. El problema 3 requiere técnica en el arte de construcción de teorías.

‡ El lector observará que, en este Apéndice, he hecho uso de dos conjuntos de conjuntos, **ts** y **tu**. Como estos signos son signos no definidos, es difícil ver de qué forma pueden ser considerados como abreviadores a la manera de **Dlz**. Puede que haya algún modo de tratarlos como abreviadores; mas por el momento no veo claramente cómo hacerlo.

(i) Si $\mathbf{Ph}(X, Y)$, entonces $X = \breve{\mathbf{P}}_{*}\text{“}\, Y$,

(ii) Si $\mathbf{Ph}(X, Z)$, entonces $X = \breve{\mathbf{P}}_{*}\text{“}\, Z$,

(iii) Si $\mathbf{Ph}(X, Y)$, entonces $(\mathbf{P}\text{“}\, Y) \cap X = \Lambda$.

De (i) se sigue que

(1) (y) (si $y \in Y$, entonces $y \in X$).

Y de (ii) se sigue que

(2) (y) (si $y \in X$ e $y \in \overline{Z}$, entonces $(\exists z)\,(z \in Z$ y $z\mathbf{P}_{\text{po}}y)$).

De (1) y (2), con ayuda de los principios (3) y (6) en la Parte I, p. 29, obtenemos

(3) (y) (si $y \in Y$, entonces: si $y \in \overline{Z}$, entonces $(\exists z)\,(z \in Z$ y $z\mathbf{P}_{\text{po}}y)$).

De (ii) con ayuda de *P.M.* 91.57 obtenemos

(4) Si $(\exists z)\,(z \in Z$ y $z\mathbf{P}_{\text{po}}y)$, entonces $(\exists u)\,(u\mathbf{P}y$ y $u \in X)$.

Y de (iii) obtenemos

(5) Si $(\exists u)\,(u\mathbf{P}y$ y $u \in X)$, entonces $y \in \overline{Y}$.

De (3), (4) y (5), por el principio (6) en la p. 29, obtenemos

(6) (y) (si $y \in Y$, entonces: si $y \in \overline{Z}$, entonces $y \in \overline{Y}$).

De (6), por transposición, obtenemos

(7) (y) (si $y \in Y$, entonces: si $y \in Y$, entonces $y \in Z$).

De lo cual se sigue que

(8) (y) (si $y \in Y$, entonces $y \in Z$).

De donde

(9) $Y \subset Z$.

Por un procedimiento exactamente análogo obtenemos

(10) $Z \subset Y$.

En consecuencia, de (9) y (10) tenemos

(11) $Y = Z$.

CAPITULO VI: *BIOLOGIA Y PERSONAS.*

Ha sido bastante difícil encontrar un título apropiado para este capítulo. Los capítulos anteriores se han ocupado de los métodos del pensamiento exacto en relación con ciertas ramas de la biología. En este capítulo atravesaremos las fronteras de la epistemología (la teoría del conocimiento) y la ontología (la teoría de lo que hay) para aprender algo acerca de las fuentes del desequilibrio de nuestra civilización del s. XX. Este desequilibrio se refiere al enorme progreso de la ciencia natural y la tecnología durante los últimos doscientos años, y el pequeño progreso que comparativamente se ha dado durante esos doscientos años en el arte de vivir juntos en unidad, paz y concordia. Ciertamente, ha habido algún progreso, pero es suficiente abrir cualquiera de nuestros diarios para ver con qué deplorable amplitud se dan entre nosotros la guerra y el crimen, con toda su crueldad y destructividad. En lo que sigue esperamos mostrar algunas de las fuentes de este desafortunado estado de cosas, y aprender de ello dónde buscar una guía para poder mejorarlo. Pero lo primero es comprender las fuentes, porque se nos ha enseñado *qué* hacer durante muchos siglos, pero hemos estado demasiado ciegos por falta de comprensión para apreciarlo.

Si vivimos en un mundo desequilibrado, hemos de vivir en un mundo bi-polar, pero si no acertamos a reconocer los dos polos en cuestión, no podremos entender adecuadamente el desequilibrio. ¿En qué consisten, pues, estas dos polaridades? Consisten en lo siguiente: en primer lugar, existe la parte llamada mundo físico, el mundo de las cosas físicas; la segunda parte es la constituida por el mundo de las personas o el mundo personal. Ahora bien, hay un sistema de creencias, en el cual hemos sido todos infortunadamente adoctrinados por nuestros padres y que tiene el efecto de ocultarnos las dos facetas de nuestra vida. Llamaremos a esta doctrina *materialismo del sentido común*. Tiene tres creencias o axiomas básicos:

Axioma 1. Cada persona es idéntica con su cuerpo.
Axioma 2. Toda visión se identifica con el objeto físico *del cual* es visión.
Axioma 3. Todo lo que existe, existe en un determinado lugar y en un tiempo determinado.

Por identidad en este contexto se entiende *identidad estricta*, de modo que una persona es idéntica con su cuerpo si, y sólo si, constituyen uno y el mismo objeto, no dos objetos que se parecen el uno al otro. Así por ejemplo, el Sr. Pérez *es* su cuerpo de acuerdo con esta doctrina. Del mismo modo el segundo axioma significa que una visión de la luna *es* la luna, no algo meramente parecido a la luna.

Ahora bien, está claro que si aceptamos los axiomas básicos anteriores (y no otros), nos comprometemos en la creencia de que vivimos en un mundo puramente material en el cual sólo existen objetos físicos. Esto, aparentemente, no crea dificultad para la ciencia natural y la tecnología; pero sí que limita el campo de nuestra búsqueda de la ayuda que necesitamos si hemos de vivir juntos en unidad, paz y concordia. Porque si somos simplemente objetos físicos que siguen las leyes fijadas de la naturaleza, entonces no podremos escoger entre unión y desunión, entre paz y guerra, entre concordia y discordia. Dícese que T. H. Huxley sostuvo que:

> si la evolución mostró la carencia de fundamento de las distinciones morales, era nuestro deber decir la verdad y decirla así.

Pero en un mundo puramente material la evolución es solamente la evolución de los cuerpos, esto es evolución biológica, y la evolución biológica no nos dice nada acerca de las distinciones morales; la biología, como todas las ciencias naturales, abstrae de las distinciones morales.

Si el materialismo del sentido común es una doctrina ampliamente creída, como parece ser el caso, puede entenderse el por qué de nuestra unidimensionalidad y de nuestro desequilibrio. Examinemos los axiomas para ver si entran en conflicto con otras creencias bien establecidas. Todos hablamos acerca de nuestros propósitos, nuestros planes, nuestros deseos o aspiraciones. También admitimos que disponemos de una multitud de opciones y que podemos tomar decisiones. Pero estas nociones no entran dentro del marco de la ciencia natural. La biología no reconoce los propósitos. Las explicaciones que envuelven la noción de propósito son llamadas explicaciones teleológicas y son excluidas de la biología. Tampoco reconoce la ciencia natural las elecciones libres; los sucesos naturales ocurren de acuerdo con las leyes causales de la naturaleza. Parece claro entonces que, si vamos a buscar sinceramente la verdad, no podemos aceptar el primer axioma del materialismo del sentido común como una creencia filosófica general, sino solamente como parte de los fundamentos de la ciencia natural. Debemos reconocer valientemente que somos personas con cuerpos, con el privilegio de tener propósitos y tomar decisiones y, al mismo tiempo, reconocer las responsabilidades que tal privilegio comporta.

Examinemos el segundo axioma. Este nos lleva también a ciertas consecuencias que son difíciles de mantener a la luz de algunas de nuestras experiencias. En primer lugar, tenemos el experimento bien conocido de introducir una varilla recta en un vaso de cristal semilleno de agua. Vista desde un lado, la varilla parece doblada, pero cuando se la saca, parece recta otra vez. Aquí tenemos la opción de creer, o bien que (i) la varilla se dobla al meterla en el agua y se endereza al sacarla; o que (ii) la imagen que tenemos de la varilla *no* es idéntica a la varilla. El Axioma 2 nos lleva a la alternativa (i), pero la mayoría de las personas no dan crédito a (i) aun cuando parecen estar de acuerdo con el Axioma 2.

Otro ejemplo, si es que se necesita, lo proporciona la experiencia de ir andando entre los raíles de una vía de ferrocarril. Si creemos que las imágenes son idénticas a las cosas de las cuales son imágenes, tendremos que decir que, según caminamos a lo largo de ellos, los raíles se cierran más y más a medida que se alejan de

nosotros, pero que se abren para dejarnos pasar y se vuelven a cerrar a nuestra espalda según nos alejamos. Pero nadie cree esto. Creemos que los raíles están fijados firmemente a los travesaños de madera, los cuales están asimismo fijados al suelo. ¿Cómo entonces pueden llegar a establecerse estas extraordinarias creencias? No es difícil encontrar una respuesta razonable.

Supongamos que una madre lleva a su pequeño a dar un paseo por su jardín un anochecer cuando la luna brilla. Señala hacia la luna y dice: "Mira Juan, esa es la luna". Juan mira hacia arriba y obtiene una visión de la luna y supone naturalmente que la visión que obtiene es aquello de lo que su madre le está hablando. De esta forma, inconscientemente Juan se instruye en el segundo axioma del materialismo del sentido común.

En otra ocasión, cuando su madre está paseando con Juan por la Calle Mayor de su ciudad, y ve a un viejo amigo al otro lado de la calle, le dice: "Mira Juan, ese es el Sr. Pérez". Juan mira y obtiene una visión de parte de las ropas del Sr. Pérez y de la piel de su cara. Desde entonces, Juan asocia el nombre del Sr. Pérez con visiones similares; y así hemos puesto los fundamentos para la creencia en el Axioma 1 del materialismo del sentido común. Hemos visto ya las razones para dudar de este axioma, y ahora tenemos otras nuevas; porque una persona no consiste en fragmentos de piel o fragmentos de ropa, ni tampoco es su cuerpo. Una persona tiene propósitos y elige, pero un objeto físico no hace tal.

Habiendo visto ahora algunas razones para limitar de alguna forma el alcance de los dos primeros axiomas del materialismo del sentido común, veamos qué es lo que vamos a adoptar como fundamento para una ontología más liberal y amplia. Parece que se requieren al menos cuatro categorías básicas y mutuamente excluyentes: (i) personas, (ii) objetos físicos, (iii) enlaces cognitivos, (iv) enlaces físicos. Las imágenes son enlaces cognitivos y lo mismo son los sonidos, sentimientos, olores y gustos. Los enlaces físicos no se han mencionado todavía. Es necesario hacerlo aquí para aclarar la diferencia entre obtener una imagen visual y ver algo. Es posible obtener una imagen visual sin ver, pero no ver algo sin tener una imagen visual de ello. Juan puede obtener una imagen visual de la luna mientras duerme en la cama, soñando con la luna, tras su experiencia de ella en el jardín. Ver es obtener una imagen visual de algo cuando el cuerpo de la persona que está obteniendo la imagen está físicamente enlazado (i. e. por la luz) con el objeto *del cual* aquélla es una imagen. Otros ejemplos de enlaces físicos nos los dan la gravitación y el magnetismo; la física moderna proporciona muchos otros.

Es interesante observar que las imágenes son los únicos enlaces cognitivos identificados (en el materialismo del sentido común) con el objeto físico al cual está cognitivamente enlazada la persona concerniente. La razón de esto no es difícil de descubrir. Si se obtiene una imagen de una rosa y al mismo tiempo un olor de la misma rosa, y si no solamente se identifica la imagen de la rosa con la rosa, sino también se identifica el olor con la rosa, entonces se verá uno compelido por ello a identificar una imagen con un aroma (si imagen x = rosa y, y aroma z = rosa y, entonces, imagen x = aroma z) ¡Pero nadie se equivocaría al distinguir una imagen visual de un aroma!

Debemos volver ahora a la tarea de decir algo sobre las personas, sus propósitos y sus elecciones. Lo que hace difícil decir algo que sea comprobable acerca

de las personas es el hecho de que no podemos obtener imágenes de ellas o mantener con ellas un enlace cognitivo directo. Podemos tener enlace cognitivo con sus cuerpos, pero no con ellas. Hay sin embargo enlaces de tipo más sutil entre personas. Las personas tienen pensamientos, palabras y deseos. Aprendemos indirectamente estas cosas mediante los enlaces cognitivos con los cuerpos de las personas de que se trate. El que vivamos en unidad, paz y concordia o no, depende primariamente de aquellos de nuestros pensamientos que son propósitos y elecciones.

Consideremos ahora algunos de los más importantes tipos de propósitos: éstos pueden clasificarse en tres categorías principales: (i) aspiraciones, (ii) ambiciones, y (iii) apetitos. El tipo de ser humano que desarrolla una persona, depende en gran manera del orden en el cual coloque estas tres categorías. Una aspiración es una lucha hacia la perfección como persona. Las aspiraciones nos llevan fuera de nosotros mismos. Las ambiciones, por otra parte, nos mantienen firmemente concentrados en nosotros mismos, de suerte que nuestros esfuerzos se dirigen hacia nuestra propia glorificación y no demasiado hacia la promoción del bienestar de otros. Finalmente, los apetitos son, por así decir, el resultado de la presión que ejerce el cuerpo de una persona sobre la misma persona: el cuerpo animal haciendo demandas sobre la persona no física. Si colocamos las aspiraciones en el primer lugar de nuestras vidas, estaremos en una posición favorable para mantener bajo control nuestras ambiciones y apetitos. Pero si se da prioridad a las ambiciones o los apetitos, la persona estará en peligro de caer en dificultades de muchos tipos, personales y corporales.

La palabra "persona", al igual que muchas otras, es malentendida con facilidad. Es conveniente, por tanto, intentar aclarar el sentido en el cual se usa aquí. La palabra "persona" proporciona la respuesta a la cuestión "¿qué soy yo?", si rechazamos el primer axioma del materialismo del sentido común. Nos suministra también un medio para distinguir tres cosas u objetos que no se distinguen en ese primer axioma, a saber: (i) cuerpos humanos, (ii) personas humanas, y (iii) seres humanos. Un ser humano es el objeto que se forma cuando una persona humana se *encarna* en un cuerpo humano. Esta relación de ser encarnado es única, y por tanto no puede ser definida en otros términos más familiares. Parece ser, al menos bajo condiciones normales, una relación de uno a uno: una persona tiene sólo un cuerpo, y un cuerpo humano tiene solamente una persona encarnada en él. Debe tenerse cuidado en no confundir el uso que aquí se hace de la palabra "en" con el uso de "en" cuando hablamos de estar "en una caja" o "en una habitación". Es decir, no se trata de una relación espacial. Es lo que podemos llamar una relación *atópica*, o sea una relación en la cual al menos uno de los términos que mantienen esa relación no está en "en el espacio". Esta afirmación acerca de no estar "en el espacio" nos recuerda que el tercer axioma del materialismo del sentido común no ha sido aún discutido. Estar atópicamente relacionado con algo es claramente no estar en conformidad con el tercer axioma. Las personas no son los únicos objetos que están atópicamente relacionados con otros objetos. Esta relación es válida para propósitos, elecciones, pensamientos, enlaces cognitivos y otros objetos. Tales entidades no están "en" los cuerpos de las personas; no se encuentran esas cosas cuando se hace la disección de un

cuerpo humano. Y a pesar de ello, la gente habla a veces como si esperaran encontrarlas. En su *Science and the Modern World,* 1927, A. W. Whitehead escribió:

> Algunas gentes se expresan como si cuerpos, cerebros y nervios fueran las únicas cosas reales en un mundo totalmente imaginario. En otras palabras, tratan a los cuerpos sobre la base de principios objetivistas, y al resto del mundo sobre la base de principios subjetivistas.

Ello constituye otro ejemplo de lo que Whitehead significa por "el uso intolerable de abstracciones". Los biólogos, de manera harto correcta para sus propósitos, abstraen de relaciones atópicas y de otros objetos pertenecientes al mundo de las personas. Pero algunos, no contentos con esto, sienten que no solamente deben abstraer de ellas, sino rechazarlas totalmente, cualquiera que sea la importancia que tengan en otros campos de investigación. Si hemos de hacer justicia a perspectivas más amplias no debemos confinarnos a un modo único de abstracción. Si no estamos dispuestos a hacerlo, no podemos esperar ser capaces de usar una ontología más liberal que la proporcionada por el materialismo del sentido común.

Hemos de volver ahora a la cuestión del largo retraso en la consecución de la unidad, la paz y la concordia. Se trata de una cuestión que envuelve, antes que nada, una consideración de las diferentes relaciones entre las personas. Hay tres tipos de tales relaciones que son de primordial importancia en este contexto: (i) amor (en uno de los significados de esta ambigua palabra), (ii) indiferencia, y (iii) odio. En lo que sigue no se usará la palabra "amor" sino que en su lugar se usará la palabra griega 'agapé', que se traduce por "amor". Una persona está en agapé con otra cuando la primera tiene compasión por la segunda y esto lo expresa en una cuidadosa solicitud por ella. Esta relación se llama a veces, amor desinteresado o amor cristiano. Asignemos letras a las tres relaciones anteriores: A para agapé, I para indiferencia y O para odio. Ahora, si tomamos dos personas cualesquiera, cada miembro de este par estará en una y (en un momento determinado) sólo en una de las tres relaciones con la otra persona. Habrá entonces seis posibles tipos de pares de personas; ello puede ser establecido en una tabla como sigue:

A, A	**A, I**	**A, O**
	I, I	**I, O**
		O, O

En esta tabla **A, A** representa el conjunto de todos los pares de personas en los cuales cada miembro del par está en agapé con el otro. **A, I** representa el conjunto en el que un miembro está en agapé con el otro, pero ese otro es indiferente al primero. **A, O** representa el conjunto de todos los pares en los cuales un miembro está en agapé con el otro, pero ese otro odia al primero; y así para las tres clases de pares restantes.

Ahora parece claro que en una sociedad de personas en la que todos los pares fuesen pares de agapé doble, no habría guerra ni crimen, y la cooperación ocuparía el lugar de la competición. Esta es precisamente la clase de compañerismo que Jesucristo vino a enseñar y a lo que llamó el Reino de Dios. Llamó a Dios su Padre y nos enseñó a llamarle Padre, y también nos enseñó que Dios ama

a todos sus hijos incluso a aquéllos que no quieran pertenecer a su Reino. Tal vez un Reino de esta clase no se establezca mientras sus miembros tengan cuerpos. Jesús enseñó que la persona no muere cuando muere el cuerpo. El cuerpo hace difícil poner las aspiraciones antes que las ambiciones y apetitos; pero si no se hace así, es muy difícil tener pares de agapé doble. Dos de los más grandes obstáculos para el establecimiento total del Reino son el orgullo y el egocentrismo. Un recensor de un libro sobre George Orwell ha escrito: "El poder, la avaricia y el orgullo son los que mantienen girando las ruedas de una sociedad dinámica, ya sea en U.S.A. ya en la U.R.S.S.". Examinemos, pues, lo que algunos escritores célebres han dicho acerca de los orígenes y efectos del orgullo.

William Law, en su libro *A Serious Call to a Devout and Holy Life,* publicado en 1728, tiene algunas cosas importantes que decir acerca del orgullo en relación con la educación. Escribió:

> El primer rasgo de carácter que intentamos despertar en los niños es el orgullo; una pasión tan peligrosa como la de la codicia. Les alentamos a vanagloriarse de sí mismos, y hacemos todo lo que podemos para inculcar en sus mentes el sentido de sus propias aptitudes. . .
>
> Les alentamos a actuar por principios de rivalidad y ambición, de gloria, envidia y deseo de distinción, les imbuimos la idea de que pueden sobresalir entre los demás, y brillar a los ojos del mundo.
>
> Les repetimos e inculcamos esos motivos, hasta que piensan que es parte de su deber ser orgullosos y ambiciosos y a vanagloriarse de sus propias cualidades. . .
>
> Y después de todo esto, nos quejamos de los efectos del orgullo; nos asombra ver a hombres maduros actuar y ser gobernados por la ambición, la envidia, el desprecio, y un deseo de gloria, sin considerar que durante todo el tiempo de su juventud se les estuvo enseñando a ajustar a esos principios todas sus acciones y realizaciones.
>
> Si se enseña a un niño a odiar el ser superado, a codiciar la distinción y el aplauso de los demás, ¿es de extrañar que continúe actuando toda la vida de esta manera?
>
> Ahora bien, si un joven ha de comportarse siempre como un cristiano y gobernar su corazón por la doctrina de la humildad, quisiera yo saber a qué tiempo ha de comenzar a hacerlo: o, si es que ha de empezar alguna vez, ¿por qué le inculcamos tendencias contrarias a ello?

Si esto ha sido verdad de la educación anterior y posterior al s. XVIII, podemos considerar que el orgullo ha contribuido en buena medida a nuestro fracaso en lograr unidad, paz y concordia. La historia parece apoyar esta suposición.

Otro autor que ha condenado el orgullo con duras palabras es Blaise Pascal (*Pensées,* 100):

> La naturaleza de la egolatría y de este Ego humano es amarse y considerarse solamente a sí mismo. Pero ¿qué hará el hombre? No puede evitar que el objeto que ama esté lleno de apetencias y defectos. Quiere ser grande, y se ve pequeño. Quiere ser feliz y se ve desgraciado. Quiere ser perfecto y se ve lleno de imperfecciones. Quiere ser objeto de amor y consideración entre los hombres y ve que sus faltas merecen solamente odio y desprecio. Esta ansiedad en que se encuentra provoca en él la más injusta y criminal pasión que pueda ser imaginada; porque concibe una mortal enemistad contra esa verdad que le reprueba y que le convence

> de sus faltas. Desearía aniquilarla, pero, incapaz de destruirla en su esencia, la destruye tanto como puede en su propio conocimiento y en el de otros; es decir, dedica toda su atención a ocultar sus faltas ante los otros y ante sí mismo y no puede soportar ni que otros se las muestren, ni que las vean.
>
> Verdaderamente es un mal estar lleno de faltas; pero es aún peor estar lleno de ellas y no querer reconocerlas, ya que esto es añadir la falta adicional de una ilusión voluntaria.

Un ejemplo interesante del modo como opera el orgullo, lo proporciona el modo en que se cita a menudo un soliloquio muy conocido del *Hamlet* de Shakespeare, como si fuera lisonjero para la persona humana; y, si se ignora su contexto, suena ciertamente lisonjero:

> ¡Qué maravillosa obra es el hombre! ¡Qué noble en razón! ¡Cuan infinito en facultades! ¡En formas y movimiento, cuan expresivo y admirable! ¡En acción es como un angel! ¡En comprensión, como un Dios! ¡La belleza del mundo! ¡El parangón de los animales!

Mas no bien se lanza una mirada al contexto se observa que no es en absoluto ser lisonjero lo que intenta Hamlet. Está siendo irónico; está contrastando la jactancia de las personas que le rodean con su actuación personal. Lo que realmente dice es: ¡Qué asquerosa obra es el hombre! El pasaje antes citado continúa con las siguientes palabras que se omiten muy a menudo:

> Y aún para mí, ¿qué es esta quintaesencia de polvo? El hombre no me deleita, la mujer tampoco. . .

Y en el mismo acto y escena (Act. II, Esc. ii) cuando Hamlet pide a Polonio 'mira que los actores estén bien colocados' y Polonio responde: 'mi señor, yo los usaré según lo que merezcan', Hamlet se enfada y responde: 'linaje de Dios, el hombre, mucho mejor; utiliza a cada hombre según su valía y ¿quién escapará a los azotes?'. También en el siguiente acto hace Hamlet la siguiente confesión:

> Yo mismo soy indiferentemente honesto, pero aún podría acusarme de tales cosas que sería mejor que mi madre no me hubiera parido: soy muy orgulloso, rencoroso, ambicioso, con más ofensas en mi alforja que pensamientos para llenarla, que imaginación para darles forma, o tiempo para hacerlas. ¿Qué deberíamos hacer los sujetos como yo, arrastrándonos entre el cielo y la tierra?

Todo esto parece dejar poco espacio a la duda de que el pasaje tan a menudo citado pretendía ser irónico.

Un ejemplo más reciente del orgullo y sus efectos lo proporciona el siguiente pasaje de una crítica de una representación de la obra de Shakespeare, *Cymbeline* en el Teatro Liceo de Londres en 1896, por B. Shaw:

> Con la sola excepción de Homero, no hay escritor eminente, ni siquiera Sir Walter Scott, a quien pueda despreciar tanto como desprecio a Shakespeare, cuando comparo mi mente con la suya.

De todo esto se desprende que si hemos de lograr unidad, paz y concordia, debemos no sólo escapar de las redes del materialismo del sentido común, sino también superar el orgullo. Si podemos lograrlo empezaremos a entender algo

del esplendor del mundo de las personas, y lo importante que es anteponer las personas a los cuerpos. Una vez que hayamos superado el orgullo y obtenido una intuición de la naturaleza de las aspiraciones, empezaremos a ver que nos conducen a la mejor clase de vida; mejor no porque nos permita satisfacer nuestros deseos individuales, sino porque es mejor para todos.

Hay un respecto en el que las personas se parecen a sus cuerpos: necesitan alimento. Al igual que nuestros cuerpos necesitan la clase de alimento llamada vitaminas, aunque se tardó muchos siglos en descubrirlo, de la misma forma las personas necesitan también para su salud una clase especial de alimento que, a pesar de que hemos sido avisados de su necesidad durante dos mil años, sigue aún menospreciada por muchos. Este alimento personal especial fue llamado por Jesús "la Palabra de Dios". Uno de los mejores modos de obtenerlo y digerirlo adecuadamente es leyendo *The Daily Study Bible* de William Barclay, Profesor de Teología de la Universidad de Glasgow. Este autor está especialmente bien dotado para la tarea de comentar los Evangelios por su conocimiento del griego y del hebreo, y de las creencias y costumbres de los judíos en el tiempo en que los Evangelios fueron escritos. Este libro ha sido traducido a muchas lenguas, incluida la nuestra.

Si esta palabra ha de recibirse con provecho, es necesaria otra cosa llamada fe. "Fe" es una de esas palabras ampliamente usadas, pero no siempre comprendidas. Cuando alguien pregunta: ¿bebe?, se supone normalmente que el líquido al que se refiere es el alcohol, no agua corriente. Del mismo modo cuando se pregunta: ¿tiene fe?, se supone que nos referimos a fe religiosa. Lo cual no deja de ser bastante extraño, porque vivimos en un mundo en el que gran parte de lo que llamamos conocimiento es realmente fe. Cuando nos sentamos a comer no *sabemos* si vamos a envenenarnos, pero tenemos fe en nuestro carnicero y en nuestro panadero. Creemos que toman las precauciones necesarias para asegurar que la comida que proporcionan no es dañina. Del mismo modo, no podemos decir que conozcamos quiénes son nuestros padres; pero tenemos fe en el testimonio de las personas que nos han criado desde la niñez. Las personas que nos han enseñado la palabra de Dios, desde Jesucristo y sus Apóstoles en adelante, han vivido rectamente y no han proporcionado base alguna para que no tengamos fe en su testimonio y consejo. Una manera de decidir si hemos de otorgar nuestra fe a determinada doctrina, consiste en considerar sus frutos. Si desterramos el materialismo de sentido común y el orgullo, y dedicamos nuestro tiempo a asimilar el alimento proporcionado por la palabra de Dios, disfrutaremos de lo que se llama "frutos del espíritu", y que son: amor, alegría, paz, paciencia, bondad, amabilidad y auto-control. Nos vemos aquí confrontados con un conjunto de elecciones entre los miembros de la lista anterior y los correspondientes miembros de la lista siguiente: odio, tristeza, lucha, impaciencia, maldad, violencia y auto-abandono. Que cada cual haga su elección y mantenga su fe de acuerdo con ella.

Quien pueda albergar dudas acerca de si una formación científica es compatible con la actitud aquí recomendada, debiera recordar que Newton, Mendel, Clerk Maxwell y Eddington –por mencionar sólo unos pocos– fueron todos hombres de ciencia eminentes y también buenos cristianos.

Finalmente, pueden servir de ayuda los pasajes siguientes. Bertrand Russell ha dicho:

> Hay ciertas cosas que nuestro tiempo necesita... La raíz de la cuestión es una cosa muy simple y muy antigua, una cosa tan simple que casi me avergüenza el mencionarla por miedo a la sonrisa irónica con la que los sabios cínicos saludarán mis palabras. La cosa a que me refiero –y ruego se me excuse por mencionarla– es el amor, el amor cristiano o compasión. Si se experimenta este sentimiento, entonces se tiene un motivo para existir, una razón para ser valeroso, una necesidad imperativa de honestidad intelectual.

El segundo pasaje es del psicólogo Jung:

> Durante los pasados treinta años, gentes de todos los países civilizados de la tierra han venido a consultarme... De entre todos mis pacientes en la segunda mitad de su vida –es decir, que superaban los treinta y cinco años– no ha habido ninguno cuyo problema no se redujera en última instancia al de hallar una perspectiva religiosa de la vida. Innecesario es decir que cada uno de ellos se siente enfermo porque ha perdido aquello que las religiones vivas de cada época han proporcionado a sus seguidores, y ninguno de los que realmente han sido sanados ha dejado de recuperar su perspectiva religiosa.

Finalmente, la urgencia de una decisión respecto a las cuestiones que hemos venido discutiendo está bien expresada en el siguiente sumario de una declaración de los fines de las *Memorial Lectures* de A. S. Eddington:

> El rápido crecimiento del control del hombre sobre las fuerzas naturales ofrece perspectivas de realizaciones materiales que son deslumbrantes; pero a menos que este incesante control de poder material sea contrapesado por un gran avance moral y espiritual, amenaza con el catastrófico colapso de la civilización humana. En consecuencia, nunca como hasta ahora fue tan urgente la necesidad de una síntesis del tipo de comprensión a adquirir mediante las diversas vías –científica, filosófica y religiosa– de búsqueda de la verdad.

JOHN Henry Woodger pasará a la historia de la ciencia como el gran teórico de la biología que ha dado cima en solitario a la gigantesca tarea de asentar la ciencia de la vida sobre bases axiomáticas, al igual que hicieron Whitehead y Russell con la aritmética o Euclides con la geometría. Biólogo profesional y experto en lógica y metodología de la ciencia, investigador infatigable en un campo del que es pionero, el profesor Woodger —que ha llevado a cabo algunos de sus trabajos en contacto con figuras como Von Bertalanffy, Waddington, Tarski y Popper— nos ofrece en Biología y lenguaje la culminación de los esfuerzos de toda una vida. Más de la mitad del contenido de la presente versión castellana es material inédito, resultado de las últimas investigaciones de su autor.

La primera parte de la obra encierra en medio centenar de páginas una síntesis lúcida, original y transparente de la teoría general del método hipotético-deductivo en ciencia empírica, que se ilustra con una revisión metódica del tratado de Harvey "De motu cordis". La segunda parte presenta una axiomatización de la genética, desde la ontología de la relación de parte, pasando por los conceptos básicos de bionte y ambiente, a la dinámica de la reproducción. En el curso de esta tarea el autor ha de utilizar relaciones formales que superan en grado de complejidad a todas las empleadas por Whitehead y Russell en los "Principia Mathematica". La obra finaliza con el análisis del proceso de la evolución en términos de álgebra de Boole y una penetrante meditación filosófica sobre la relación entre organismos y personas.

Al dedicarle el volumen de homenaje a su septuagésimo aniversario, los profesores Gregg y Harris escribieron del autor: "Hay ciertas semejanzas entre Woodger y Darwin, otro gran innovador en el campo de la biología. Pues, lo mismo que Darwin, Woodger ha dedicado mucho tiempo y esfuerzo al desarrollo de sus ideas sin haber obtenido de sus contemporáneos el suficiente reconocimiento".